Univerza v Ljubljani
Pedagoška fakulteta

Zbirka nalog iz Matematičnih metod v fiziki 1 za 1. letnik

Gregor Bavdek, Bojan Golli, Jure Bajc

12. januar 2016

Kazalo

Poglavje 1

Dimenzijska analiza

1. Zgledi za določitev fizikalne enačbe s pomočjo znanih enot za posamezno fizikalno količino: $v = s/t$, $v = at$, $P = A/t\ \ldots$
2. Zgledi za določitev enote pri fizikalnih količinah in snovnih konstantah: $\Delta l/l = F/ES$, $F/S = \eta\, v/l$, $\Delta W_n = mc_p \Delta T$, $J = mr^2\ \ldots$
3. Z dimenzijsko analizo poišči odvisnost sile upora od hitrosti.
   (kvadratni zakon upora: $F = 1/2 c_v \rho v^2 S$, linearni zakon upora: $F = 6\pi r \eta v$)
   [*Namig za nastavek:* $F = k\rho^\alpha v^\beta l^\gamma$ ali $F = k\eta^\alpha v^\beta l^\gamma$]
4. Z dimenzijsko analizo poišči odvisnost volumskega toka viskozne nestisljive tekočine po dolgi cevi.
   (Poiseuillov zakon: $\Phi_V = \frac{\pi r^4}{8\eta}\frac{\Delta p}{l}$) [*Namig za nastavek:* $\Phi_V = k a^\alpha \left(\frac{\Delta p}{l}\right)^\beta \eta^\gamma$]
5. Z dimenzijsko analizo iz hitrosti širjenja prašnega oblaka oceni sproščeno energijo pri eksploziji atomske bombe. Energijo bombe oceniš v grafu $\ln R\,(\ln(t))$ iz presečišča krivulje z osjo y.
   [*Namig za nastavek:* $R(t) = kE^\alpha \rho^\beta t^\gamma$, *Rešitev:* $R(t) = kE^{1/5}\rho^{-1/5}t^{2/5}$]

Poglavje 2

Risanje funkcij

1. linearna funkcija: $f(x) = kx + n$; odvisna in neodvisna spremenljivka; vloga k in n pri grafu; ničla; primeri grafa pri različnih $k = 1, 2, 3, 100\ldots$ Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije.
   – primeri iz fizike: $o = 2\pi r$, $l = r\varphi$, $s = s_0 + vt$, $a = v_0 + vt$, $F = ma$, $A = Pt$, $M = rF$
   – prikaz omejene uporabnosti t.i. *križnega računa* – samo pri linearnih odvisnostih brez n; npr. pretvarjanje temperature iz stopinj Celzija v stopinje Fahrenheita: 25 °C = 77 °F; koliko °F je 100 °C? (pravilna enačba za pretvarjanje: $T_f = 9/5\,Tc + 32$)

2. kvadratna funkcija: $f(x) = ax^2 + bx + c$; ničle; tême; vloga diskriminante pri grafu
   – primeri iz fizike: $p = \pi r^2$, $s = s_0 + v_0 t + 1/2at^2$, $F = m\omega^2 r$, $W_k = mv^2/2$

3. korenska funkcija: $f(x) = \sqrt{x}$; Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije. Kako štarta funkcija iz koordinatnega izhodišča?

4. splošna potenčna funkcija s pozitivno potenco: $f(x) = x^a$ vpliv eksponenta na obliko grafa – 1 (linearna funkcija), 2 (kvadratna funkcija), 1/2 (korenska funkcija), 1/3 (tretji koren)...

5. potenčne funkcije z negativno potenco: $f(x) = 1/x^a$
   – primeri iz fizike: $\nu = 1/t_0$, $F = \kappa m_1 m_2/r^2$

6. eksponentna funkcija: $f(x) = ae^{bx}$; pozitivni in negativni eksponent; definicijsko območje in zaloga vrednosti
   – primeri iz fizike: $U(t) = U_0 e^{-t/\tau}$, $I(d) = I_0 e^{-\beta d}$

7. logaritemska funkcija: $f(x) = ln(x)$; definicijsko območje in zaloga vrednosti

8. sinusna (kosinusna) funkcija: $f(x) = a\sin(kx + \varphi)$

9. Nariši gladko krivuljo $y = f(x)$ in z njo še $y = f(x - a) + b$. Zaznamuj na sliki vrednosti a in b.

   [KK str. 19, nal. 1]

10. Izberi dve gladki krivulji $y = f(x)$ in $y = g(x)$ in na isti sliki nariši še produkt $y = f(x)g(x)$. (npr. $f(x) = \sin x \cos x$). [KK str. 19, nal. 4]

11. Skiciraj gladko krivuljo $y = f(x)$ z več ničlami, nato pa še krivulji za $y = [f(x)]^2$ in $y = [f(x)]^3$.

    [KK str. 19, nal. 5]

12. K poljubni funkciji $y = f(x)$ pririši še krivulji $y = [f(x)]^{1/2}$ in $y = [f(x)]^{1/3}$. Za primer vzemi $y = \sin x$.

    [KK str. 19, nal. 6]

13. Resonančno krivuljo skiciraj za različne vrednosti koeficienta dušenja a. Pri katerem a je meja, nad katero krivulja nima več resonančnega vrha? Enačba resonančne krivulje je: $y = [(1 - x^2)^2 + (ax)^2]^{-1/2}$.

[KK str. 19, nal. 9]

14. Skiciraj krivuljo $y = f(x)$ in z njo še $y = 1/f(x)$. Pomagaj si z vodoravno črto pri $y = 1$. Kaj je z ničlami f(x)? [KK str. 19, nal. 10]

15. Skiciraj Lorentzovi krivulji $y = 1/(1 + x^2)$ in $y = x^2/(1 + x^2)$. Preskus: njuna vsota je enaka 1.

[KK str. 19, nal. 12]

16. Primerjaj krivulje za $y = e^{-x}$, $y = exp(-x^2)$, $y = exp(-x^3)$. [KK str. 19, nal. 15]

17. Začenši s funkcijo $y = e^{-x}$ skiciraj še funkcijo za $y = e^{-1/x}$. Pri $x \to 0$ je druga krivulja ploska kot deska, saj so vsi odvodi z desne enaki nič. [KK str. 19, nal. 16]

18. Skiciraj $y = \sin(x^2)$ in $y = \sin 1/x$. Začni z $y = \sin x$. [KK str. 19, nal. 17]

19. Nariši sliko funkcije $y = exp(-x^2/2\sigma^2)$. Kje so obračaji? Skiciraj še odvod y', ki ga prebereš z naklona krivulje za y. Ne pozabi, da je odvod sode funkcije lih. Poskusi še z drugim odvodom y'', bodisi po naklonu krivulje za y' ali (nekoliko manj zanesljivo) iz ukrivljenosti prvotne krivulje. [KK str. 19, nal. 20]

Za preverjanje grafov pri risanju funkcij lahko uporabite brezplačni spletni program *Wolfram Alpha*, ki ga najdete na spletnem naslovu `www.wolframalpha.com`.

Poglavje 3

Taylorjeva vrsta

1. Z razvojem v Taylorjevo vrsto pokaži veljavnost Eulerjeve formule: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

2. Poišči Taylorjev razvoj za izraz $(1-x)^{-3/2}$.
   [*Rešitev:* $1 + \frac{3}{2}x + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x^2 + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}x^2 + \ldots$]

3. Poišči prve tri člene (do vključno drugega odvoda) razvoja v Taylorjevo vrsto za $\frac{1}{1+x^2}$. Razvoj naredi okrog točke 0. [k1,3,2011/2012] [i3,3,2012/2013]
   [*Rešitev:* $1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-2}{2!}x^2$]

4. Poišči prve tri člene (do vključno drugega odvoda) razvoja $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ v Taylorjevo vrsto. Razvoj naredi okrog točke 0. [i2,2,2011/2012] [i2,1b,2012/2013]
   [*Rešitev:* $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \ldots$]

5. Poišči prve tri člene (do vključno drugega odvoda) razvoja funkcije $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ v Taylorjevo vrsto. Razvoj naredi okrog točke 0. [i3,2,2011/2012] [i1,1iii,2012/2013]
   [*Rešitev:* $1 - 2x + 3x^2 - \ldots$]

6. Poišči prve tri člene (do vključno drugega odvoda) razvoja funkcije $\sqrt[4]{1+x}$ v Taylorjevo vrsto. Razvoj naredi okrog točke 0. [k1,2,2012/2013]
   [*Rešitev:* $1 + \frac{1}{4}x - \frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}x^2 + \ldots$]

Poglavje 4

Računanje majhnih sprememb

1. Za koliko % se povečata površina in prostornina krogle, če se radij poveča za 1 %?
[*Rešitev:* 2 %, 3 %]

2. Za koliko se zmanjša težni pospešek, če se dvignemo 100 m od tal? Radij Zemlje je 6400 km.
[*Rešitev:* $-3{,}1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m/s}$]

3. Ura na nihalo ($T = 2\,\mathrm{s}$) zaostaja za 15 s na dan. Za koliko je treba skrčiti ali podaljšati nihalo? (Za nihajni čas velja $T = 2\pi\sqrt{l/g}$)
[*Rešitev:* $-0{,}35\,\mathrm{mm}$]

4. Natrijevi črti imata valovni dolžini 589,0 nm in 589,6 nm. Kolikšna je razlika frekvenc? (Velja $\nu = c/\lambda$.)
[*Rešitev:* $-5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{s^{-1}}$]

5. Za čas padanja z višine h smo izpeljali $t = \sqrt{2h/g}$. Za koliko % se spremeni čas, če se višina spremeni za 1 %?
[*Rešitev:* 0,5 %]

6. Pri Wheatstonovem mostičku smo neznani upor računali po formuli $R = R_0\frac{x}{l-x}$. Izrazi relativno spremembo upora $\Delta R/R$ z Δx.
[*Rešitev:* $\frac{\Delta R}{R} = \frac{l}{x(l-x)}\Delta x$]

7. Za kot totalnega odboja pri prehodu žarka iz stekla v zrak velja $\sin\vartheta = 1/n$. Za koliko se spremeni kot, če se lomni količnik spremi za 10^{-6}? Za n vzemi 1,5. Rezultat izrazi samo z n.
[*Rešitev:* $\Delta\vartheta = -\Delta n/n\sqrt{n^2-1}$]

8. Svetlobna moč pojema z globino kot $P = P_0 e^{-\mu h}$, kjer je $\mu = 0{,}5\,\mathrm{m^{-1}}$ absorpcijski koeficient sredstva. Za koliko % se spremeni moč v globini $h = 10\,\mathrm{m}$, če se zaradi onesnaženja absorpcijski koeficient poveča za 0,1 %?
[*Rešitev:* $-0{,}5$ %]

9. Temperaturo vrelišča vode T pri tlaku p in vrelišče T_0 pri tlaku p_0 povezuje enačba $p = p_0 e^{k(1/T_0 - 1/T)}$, $k = 4900\,\mathrm{K}$. Za koliko se spremeni temperatura vrelišča, če se pri temperaturi $T = 330\,\mathrm{K}$ tlak spremeni za 10^{-3}?
[*Rešitev:* $\Delta T = (T^2/k)\Delta p/p$]

10. Jekleno žico, ki je dolga 2 m in ima premer 1 mm, napnemo s silo 100 N. Prožnostni modul za jeklo je $2 \cdot 10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$. Za koliko se spremeni raztezek ob majhnem povečanju premera

žice za 0,01 mm? Raztezek žice s izračunaš s pomočjo Hookovega zakona: $\frac{s}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}$. [k1,1a,2009/2010]
[*Rešitev:* $\mathrm{d}s = -2(s/r)\mathrm{d}r = -2{,}5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}$]

11. Mednarodna vesoljska postaja kroži okrog Zemlje na konstantni razdalji 6700 km od Zemljinega središča. Za koliko % se spremeni frekvenca kroženja vesoljske postaje okrog Zemlje, če se njena oddaljenost od središča Zemlje spremeni za 10 km? Masa Zemlje je $6{,}0 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$. Krožno frekvenco ω izraziš iz Newtonovega zakona za kroženje: $m\omega^2 r = \kappa m M/r^2$. Vrednost gravitacijske konstante κ je $6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}\,s^{-2}}$.
[*Rešitev:* $\mathrm{d}\omega/\omega = -(3/2)\mathrm{d}R/R = -0{,}22\%$] [k1,1b,2009/2010]

12. Napetost na kondenzatorju pri praznjenju skozi upornik opisuje enačba $U(t) = U_0 e^{-t/\tau}$, kjer je $\tau = 7{,}9\,\mathrm{s}$, $U_0 = 12{,}3\,\mathrm{V}$ pa začetna napetost na kondenzatorju. Za koliko % se spremeni napetost na kondenzatorju v času $20\,\mu\mathrm{s}$? Majhno spremembo napetosti izrazi z majhno spremembo časa! [kp,1i,2009/2010]
[*Rešitev:* $\mathrm{d}U/U = -\mathrm{d}t/\tau = -2{,}5 \cdot 10^{-6}$]

13. Napetost na kondenzatorju pri polnjenju skozi upornik opisuje enačba $U(t) = U_0(1 - e^{-t/RC})$. Pri tem je začetna napetost $U_0 = 6{,}3\,\mathrm{V}$, upornost upornika $R = 12\,\mathrm{k\Omega}$ in kapacitivnost kondenzatorja $C = 12\,\mathrm{nF}$. Za koliko % se spremeni napetost na kondenzatorju v času 6,3 ms od trenutka, ko je bila na kondenzatorju napetost U_0? Majhno spremembo napetosti izrazi z majhno spremembo časa! [i1,1,2009/2010]

14. Upogib v dveh krajiščih podprte palice, ki jo obremenimo na sredini, je podan z enačbo $u = \frac{Fl^3}{4Ea^4}$. Pri tem je F sila, ki obremenjuje palico, l razdalja med podpornikoma, E prožnostni modul in a dolžina roba kvadratnega preseka palice.

    a) Za koliko procentov se zmanjša upogib, če povečamo rob preseka za 0,25%? Rezultat izračunaj z upoštevanjem majhnih sprememb!

    b) Za koliko milimetrov se poveča upogib, če podporna nosilca, ki sta med seboj oddaljena 80 cm, razmaknemo za dodaten centimter? Upogib palice pred razmikom krajišč je bil 6,5 mm. Majhno spremembo upogiba izrazi z majhno spremembo razdalje! [k1,1ab,2010/2011]

15. Pri iztekanju vode iz posode opiše tir curka enačba $y = -\frac{x^2}{4h}$, kjer izhodišče postavimo v točko izteka na dnu posode. Za koliko % se je spremenila višina gladine (h) v posodi, če se je x koordinata vzdolž celotnega curka povečala za 1%? [k1,1a,2011/2012]
[*Rešitev:* 2%]

16. Za koliko se valju, katerega višina je mnogo manjša od premera, spremeni površina pri majhni spremembi radija, če se mu volumen pri tem spremeni za $1\,\mathrm{dm^3}$? Višina valja je 0,2 dm. (Namig: podatek, da je $h \ll 2r$, upoštevaj šele v zadnjem koraku reševanja naloge.) [k1,1b,2011/2012]
[*Rešitev:* $10\,\mathrm{dm^2}$]

17. Pot avtomobila, ki v nekem trenutku spelje s pospeškom a, opišemo z enačbo $s = \frac{1}{2}at^2$. Za koliko se spremeni pot, ki jo avto prepotije v eni sekundi, če bi speljal s pospeškom, ki bi bil za $0{,}05\,\mathrm{m/s^2}$ večji od pospeška a? Upoštevajte, da je sprememba pospeška v primerjavi s pospeškom a zelo majhna.
[*Rešitev:* 0,025 m] [i1,1i,2011/2012] [i3,1a,2012/2013]

18. Za koliko % se telesu spremeni kinetična energija, če se mu hitrost poveča za 2 %? Formula za kinetično energijo je: $W_k = \frac{mv^2}{2}$. [i1,1ii,2011/2012] [i3,1b,2012/2013]
[*Rešitev:* 4 %]

19. Hitrost izstrelka lahko določimo z balističnim nihalom. Če je masa izstrelka (m) zanemarljiva v primerjavi z maso nihala (M), lahko hitrost izstrelka (v) kot funkcijo višine (h), do katere nihalo zaniha glede na ravnovesno lego, izrazimo s formulo $v = M\sqrt{2gh}/m$. Kako natančno lahko določimo hitrost izstrelka, če lahko izmerimo spremembo višine na 1% natančno? [i3,1a,2011/2012]

20. Neprodušno zaprt valj je napolnjen s plinom. Za koliko % se je spremenil polmer valja, če je tlak narasel za 1%? Temperatura je konstantna. Plinski zakon: $pV = nRT$. [k1,1a,2012/2013]
[*Rešitev:* – 0,5 %]

21. Hitrost elektronov v električnem polju dobimo tako, da njihovo kinetično energijo izenačimo s prepotovano potencialno razliko, $W_{\mathrm{pot}} = e_0 U$. Za koliko % se spremeni hitrost elektronov, če napetost povišamo za 2 %? [i1,1ii,2012/2013]

22. Sila na nabit delec z nabojem e_1 v električnem polju delca z nabojem e_2 je enaka $F = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Za koliko % moramo povečati naboj e_1, če razdaljo povečamo za 1 %, da sila ostane enaka? Računaj z majhnimi spremembami. [i2,1a,2012/2013]
[*Rešitev:* 2 %]

Poglavje 5

Ekstremi v 1 D

1. Pri kroženju velja $\Gamma = mvr =$ konst. Izrazi kinetično energijo $W_{\rm kin}$ z vrtilno količino Γ in zapiši celotno energijo telesa, ki kroži v gravitacijskem polju velikega telesa z maso M ($W_{\rm pot} = -GmM/r$).

   a) Poišči r, pri katerem je skupna energija ekstrem. [*Rešitev:* $r = \frac{\Gamma^2}{Gm^2M}$]

   b) Ugotovi, za kakšen ekstrem gre (minimum, maksimum, prevoj).
   [*Rešitev:* $\mathrm{d}^2W/\mathrm{d}r^2 = GmM/r^3 > 0 \Longrightarrow$ minimum]

   c) Kolikšno je razmerje med kinetično in potencialno energijo v ekstremu? Preveri veljavnost virialnega teorema v tem primeru. (Virialni teorem: $2\langle W_{\rm kin}\rangle = n\langle W_{\rm pot,tot}\rangle$, $W_{\rm pot}(r) = ar^n$)
   [*Rešitev:* $-W_{\rm kin} : W_{\rm pot} = 1 : 2$]

   d) *Dodatno:* Preveri, če dobimo za radij enak izraz kot pri izpeljavi iz Newtonovega zakona.

2. Podobno kot prejšnja naloga, le da je privlačna sila prožna sila ($W_{\rm pot} = \frac{1}{2}kr^2$). (Odgovori na vprašanja od *i* do *iv*.)

3. Telo z maso 0,5 kg kroži na elastiki iz posebne snovi, za katero velja, da je sila neodvisna od raztezka. Potencialno energijo potem lahko zapišemo kot br, pri čemer je $b = 1\,\mathrm{N}$. Telo se vrti z vrtilno količino $\Gamma = 2\,\mathrm{Js}$, ki se pri gibanju telesa ohranja.

   a) Izrazi kinetično energijo z vrtilno količino in maso telesa ter s polmerom krožnice r, po kateri telo kroži. Zapiši skupno energijo telesa. (Vemo, da je: $\Gamma = rmv$.)
   [*Rešitev:* $W = \Gamma^2/2r^2m + br$]

   b) Nariši graf, ki kaže odvisnost skupne energije od polmera kroženja.

   c) Poišči r, pri katerem ima skupna energija ekstrem. [*Rešitev:* $r = (\Gamma^2/bm)^{1/3} = 2\,\mathrm{m}$]

   d) Ugotovi, če je ekstrem maksimum, minimum ali sedlo. [k1,2,2009/2010]
   [*Rešitev:* $\mathrm{d}^2W/\mathrm{d}r^2 = 3\Gamma^2/mr^4 > 0 \Longrightarrow$ minimum]

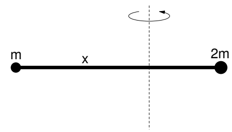
4. Pri nalogi z Wheatstonovim mostičkom (naloga 6 iz prejšnjega poglavja) zapiši izraz $(1/R)\,\mathrm{d}R/\mathrm{d}x$ in poišči ekstrem izraza. Gre za minimum ali maksimum?
   [*Rešitev:* $x = l/2$; $(\ldots)'' = 32/l^3$, minimum]

5. (nadaljevanje naloge 14 iz prejšnjega poglavja) Upogib v dveh krajiščih podprte palice, ki jo obremenimo na sredini, je poda z enačbo $u = \frac{Fl^3}{4Ea^4}$. Pri tem je F sila, ki obremenjuje palico, l razdalja med podpornikoma, E prožnostni modul in a dolžina roba kvadratnega preseka palice. Prožnostno energijo palice, ki je upognjena za u, podaja enačba $W_{\rm pr} =$

$\frac{2Ea^4u^2}{l^3}$. Potencialno energijo palice zaradi upogiba pod lastno težo pa podaja enačba $W_p = -\frac{2}{3}mgu$. Pri kolikšnem upogibu je skupna energija palice najmanjša?

[k1,1c,2010/2011]

6. Na eno krajišče zelo lahke prečke pritrdimo majhno maso m, na drugo krajišče pa maso $2m$. Na kateri razdalji od mase m moramo prebosti prečko z osjo vrtenja, ki je pravokotna na prečko, da bo vztrajnostni moment sistema ekstremen? Je vztrajnostni moment pri tako postavljeni osi minimalen ali maksimalen?



[*Rešitev:* $r = 2l/3$] [k1,1b,2012/2013]

Poglavje 6

Integrali

6.1 Splošni integrali

1. Neko vozilo se giblje s konstantno močjo. Zapiši pot kot funkcijo časa, če je bila hitrost telesa ob času $t = 0$ enaka $v_0 = 0$.
   [*Rešitev:* $v = \sqrt{2Pt/m}$, $s = s_0 + \frac{2}{3}\sqrt{2Pt^3/m}$]

2. Deset metrov dolga elastika s prožnostnim modulom $500\,\mathrm{N/cm^2}$ in gostoto $1{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$ je obešena na enem koncu. Za koliko je elastika podaljšana zaradi lastne teže?
   [*Rešitev:* $s = \rho g l^2/2E = 15\,\mathrm{cm}$]

3. Kolikšen je upor 10 m dolge bakrene žice, ki je na enem koncu debela 1 mm in se do drugega konca stanjša na 0,6 mm? Radij žice je linearna funkcija vzdolžne koordinate, tako da ima žica obliko prisekanega stožca.
   [*Rešitev:* $R = \zeta l/\pi r_0 r_1$] [KK str. 30, nal. 13]

4. Predstavljajmo si, da bi bila Zemlja prekrita z enakomerno oceansko plastjo z debelino 3000 m. Za koliko bi se ta plast sesedla zaradi stisljivosti v primeru z oceanom, ki bi bil nestisljiv? Stisljivost vode je $50 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{bar^{-1}}$.
   Namig: Velja $\Delta V/V = -\chi \Delta p$. Zapiši, za koliko ($\mathrm{d}s$) bi se stisnila plast vode z debelino $\mathrm{d}h$ in površino S na globini h zaradi hidrostatičnega tlaka na tej globini. [KK str. 30, nal. 10]
   [*Rešitev:* $s = -1/2\chi\rho g h^2$]

5. Gumijast trak z dolžino 1 m se enakomerno tanjša od premera 2 cm do premera 1 cm na drugem koncu. Z debelejšim koncem ga pričvrstimo na strop, na tanjši konec pa obesimo kilogramsko utež. Za koliko se trak raztegne? Privzamemo, da je trak veliko lažji od uteži. $E = 10^7\,\mathrm{N/m^2}$.
   [*Rešitev:* $s = mgl/\pi r_0 r_1 E$]

6. Obliko elektrode z zaobljeno konico aproksimiramo z $r = kx^{1/3}$, $0 \le x < l$, ki se zvezno nadaljuje v valjast odsek z $r = R$, $l \le x \le 3l$. Kolikšno je razmerje uporov zaobljenega in valjastega dela elektrode, če napetost priključimo med skrajnji točki elektrode?

7. Pol metra dolga jeklena palica se vrti okrog prečne osi, ki palico razpolavlja, s 300 vrtljaji na minuto. Za koliko se palica raztegne ($E = 220000\,\mathrm{N/mm^2}$, $\rho = 7{,}8\,\mathrm{kg/dm^3}$)?
   [*Rešitev:* $\Delta x = \frac{\rho\pi^2\nu^2 L^3}{6E}$]

8. Po 10 m dolgi cevi z notranjim premerom 1 mm teče zrak s temperaturo 20 °C. Tlak na začetku cevi je 500 Pa, na koncu pa 100 Pa. Izračunaj masni pretok.
   [*Rešitev:* $\Phi_m = (\pi r^4/8\eta)((p_1 - p_2)/l)\,1/2(\rho_1 + \rho_2) = 2 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{kg/s}$]

9. Po 1 m dolgi cevi s spremenljivim presekom pretakamo olje z viskoznostjo $\eta = 0{,}1\,\mathrm{Ns/m^2}$. Polmer cevi se linearno spreminja od začetne vrednosti 1 cm do končne vrednosti 2 cm. Kolikšen prostorninski tok teče po cevi, če ga poganja tlačna razlika $\Delta p = 10^4\,\mathrm{N/m^2}$? Za pretakanje po cevi s konstantnim polmerom r in dolžino l velja $\Phi = \pi\, r^4\, \Delta p/8l\eta$.

10. Valjasto posodo z osnovnico S_v napolnimo s tekočino, ki sega do višine h. V dno posode izvrtamo drobno odprtino s presekom S_o, zaradi česar začne tekočina iztekati. Po kolikšnem času se posoda izprazni? Upoštevaj, da je volumski pretok $\Phi_V = \frac{S_v \mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = S_o v$ in da hitrost iztekanja tekočine podaja Bernoullijeva enačba $\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h$. [kp,1ii,2011/2012]

11. Delavec potiska kvadrasto posodo s konstantno hitrostjo po 20 m dolgem klancu z naklonom 10°. V posodo, ki je na začetku poti prazna, njena masa pa je zanemarljiva, med tem pada dež, zato postaja vse težja. Koliko dela opravi delavec, ko pririne posodo do vrha klanca, če pade v posodo 1 liter dežja na vsak meter poti? Koeficient trenja med posodo in podlago je 0,2. [k1,2,2011/2012]
[*Rešitev:* $A = kg(k_{\mathrm{tr}} \cos\varphi + \sin\varphi)d^2/2 = 727\,\mathrm{J}$]

12. Tanka dvometrska deska, ki je široka 20 cm, se vrti s kotno hitrostjo $2\pi\,\mathrm{s^{-1}}$ okrog osi, ki gre skozi središče deske vzdolž njene 20-centimetrske širine. Kolikšen navor zaradi zračnega upora zaustavlja desko pri tej kotni hitrosti? Upoštevaj, da na desko deluje kvadratni zakon upora, $F_u = \frac{1}{2} c_v \rho v^2 S$, kjer je $c_v = 1$, $\rho = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}$. [i1,1i,2012/2013]

13. Jez s kvadratnim presekom zapira velika kvadratna loputa z robom 2 m, ki ima os na dnu. Kolikšen navor deluje na loputo, ko je jez poln vode? Hidrostatski tlak podaja enačba: $p(h) = \rho g h$. [i2,2,2012/2013] [*Rešitev:* $M = \rho g a^4/6 = 26{,}16\,\mathrm{kNm}$]

6.2 Integracija enačb gibanja: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{v})$

14. Čoln poženemo po mirni vodi z začetno hitrostjo v_0. Kako se ustavlja, če velja kvadratni zakon upora, $F_u = kv^2$? [*Rešitev:* $v = v_0/(1 + kv_0 t/m)$, $x = (m/k)\ln(1 + kv_0 t/m)$]

15. Čolniček poženemo po viskozni tekočini z začetno hitrostjo v_0. Kako se ustavlja, če velja linearni zakon upora, $F_u = kv$? [*Rešitev:* $v = v_0 e^{-kt/m}$, $x = (mv_0/k)(1 - e^{-kt/m})$]

16. Telo z maso 1 kg poženemo po vodoravni podlagi z začetno hitrostjo 1 m/s. Ustavlja se pod vplivom sile, ki je sorazmerna s korenom iz hitrosti: $F_u = -A\sqrt{v}$, $A = 1\,\mathrm{kgm^{1/2}s^{-3/2}}$. V kolikšnem času pade hitrost na 0? Kolikšno razdaljo pri tem prepotuje?

17. Kroglico iz jekla z gostoto $7{,}6\,\mathrm{g/cm^3}$ in radijem 0,4 cm spustimo v tekočino z viskoznostjo 0,1 kg/ms in gostoto $1\,\mathrm{g/cm^3}$.

    a) Zapiši enačbo za gibanje kroglice in izračunaj hitrost, ki jo doseže kroglica po dolgem času. (Upoštevaj linearni zakon upora $F_u = 6\pi r \eta v$.) [*Rešitev:* $v_0 = 2r^2(\rho - \rho')g/9\eta = 2{,}30\,\mathrm{m/s}$]

    b) V kolikšnem času doseže 90% končne hitrosti, če je na začetku mirovala?
    [*Rešitev:* $\tau = 2r^2\rho/9\eta = 0{,}270\,\mathrm{s}$, $t = -\tau\ln((v_0 - v)/v_0) = 0{,}62\,\mathrm{s}$]

    c) Kolikšno pot naredi v tem času? [*Rešitev:* $s = v_0 t - v(t)\tau = 0{,}875\,\mathrm{m}$]

18. Reši primera a) in b) pri prejšnji nalogi za primer, ko ima kroglica tik pod gladino začetno hitrost, ki je večja od končne (na primer dvakratno končno hitrost).

19. Padalec s padalom tehta 100 kg. Njegova končna hitrost je 5 m/s. Kakšno je gibanje, če je upor sorazmeren s kvadratom hitrosti? Po kolikšnem času doseže padalec 90% končne hitrosti, če na začetku miruje (z odprtim padalom)? *Kolikšno pot naredi v tem času? [*Rešitev:* $v = v_\infty(e^{2gt/v_\infty} - 1)/(e^{2gt/v_\infty} + 1) = v_\infty \mathrm{th}\,(gt/v_\infty)$, $t = 0{,}74\,\mathrm{s}$, $^*s = (v_\infty^2/g)\ln\mathrm{ch}\,(gt/v_\infty) = 2{,}07\,\mathrm{m}$]

20. Pri skoku padalec najprej prosto pada s hitrostjo 20 m/s. Izračunaj, kako se s časom spreminja hitrost padalca od trenutka, ko odpre padalo, če je upor sorazmeren s kvadratom hitrosti? Po kolikšnem času doseže padalec 1,1 končne hitrosti? Končna hitrost padalca je 5 m/s, za težni pospešek vzemi 10 m/s². [*Rešitev:* $t = -(v_\infty/2g)\ln\left(\frac{(v-v_\infty)(v_0+v_\infty)}{(v+v_\infty)(v_0-v_\infty)}\right) = 0{,}63\,\mathrm{s}$, $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$, $v_\infty = 5\,\mathrm{m/s}$, $v = 1{,}1v_\infty$]

21. Kolesar s skupno maso 80 kg vozi po vodoravni cesti in ko doseže hitrost 24 km/h, preneha poganjati.

    a) V kolikšnem času pade njegova hitrost na polovico začetne, če ga ustavlja le zračni upor (trenja ne upoštevamo)? Kolikšno pot napravi v tem času? Prečni presek kolesarja je $0{,}5\,\mathrm{m}^2$, koeficient upora $c_u = 1$ in gostota zraka $1{,}25\,\mathrm{kg/m}^3$. (Upor zraka je $F_u = \frac{1}{2}c_u\rho S v^2$.)
    [*Rešitev:* $k = c_u S\rho/2m$, $t = (1/v - 1/v_0)/k = 38{,}4\,\mathrm{s}$, $s = \ln(1 + kv_0 t)/k = 177\,\mathrm{m}$]

    b) Za koliko se skrajša čas, če upoštevamo še trenje, $k_{\mathrm{tr}} = 0{,}05$?
    [*Rešitev:* $a_0 = k_{tr}g$, $t = \left(\arctan v_0\sqrt{k/a_0} - \arctan v\sqrt{k/a_0}\right)/\sqrt{ka_0} = 23{,}5\,\mathrm{s}$, $\Delta t = 14{,}9\,\mathrm{s}$]

    c) Pri rezultatu ii) razišči obe limiti, ko je ena od zaviralnih sil znatno večja od druge.

22. Vzemimo, da je na neki podlagi sila trenja med telesom in podlago odvisna od hitrosti in jo lahko opišemo z enačbo $F_{\mathrm{tr}} = mge^{-v/v_{\mathrm{tr}}}$. Pri tem je konstanta v_{tr} enaka 2 m/s.

    a) Kolikšna je hitrost telesa po dveh sekundah, če je bila začetna hitrost 6 m/s?
    b) Po kolikšnem času se telo ustavi?
    c) Nariši graf odvisnosti hitrosti od časa.
    d) Kolikšno pot opravi telo, preden se ustavi? ($\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$) [k1,2,2010/2011]

23. Jahač na zračni drči zavira magnetna sila, ki je premo sorazmerna s hitrostjo. Pospešek jahača lahko zapišemo z enačbo $a = -\beta v$.

    a) Poišči enačbo, ki opisuje, kako se hitrost jahača, ki ga poženemo z začetno hitrostjo v_0, spreminja s časom.
    b) Kako pa je od časa odvisna pot, ki jo opravi jahač?
    c) Zapiši še, kako se spremeni hitrost ob majhnih spremembah časa in začetne hitrosti. [i1,1,2010/2011]

24. Na mirujoče telo z maso 3 kg začne v nekem trenutku delovati sila, ki je obratno sorazmerna s hitrostjo in jo podaja enačba $F = A/v$, $A = 2\,\mathrm{kgm^2/s^3}$.

    a) Zapiši, kako se spreminja hitrost telesu v odvisnosti od časa. Kolikšna je hitrost telesa po 10 s?

    b) Zapiši še, kakšna je lega telesa v odvisnosti od časa. Kako daleč je telo po 10 s? [i3,2,2010/2011]

25. Na mirujoče telo z maso 3 kg začne v nekem trenutku delovati sila, ki jo podaja enačba $F = A/v^2$, $A = 1\,\mathrm{kgm^3/s^4}$.

    a) Zapiši, kako se spreminja hitrost telesu v odvisnosti od časa. Kolikšna je hitrost telesa po 10 s?

    b) Zapiši še, kakšna je lega telesa v odvisnosti od časa. Kako daleč je telo po 10 s? [i2,3,2011/2012]

6.3 Integracija enačb gibanja: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$

26. Navzdol poveznjeno epruveto, v kateri je nekaj zraka, potopimo v vodo (kartezijski plavač). Če plavač spustimo iz ravnovesne lege, deluje nanj pri dovolj majhnih odmikih x rezultanta sil, ki je sorazmerna z odmikom od ravnovesne lege: $F = kx$ in kaže **v smeri gibanja**. Masa plavača je 10 g, konstanta $k = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N/m}$.

    a) Kolikšno hitrost doseže plavač, ko prepotuje 10 cm, če je bil na začetku v ravnovesni legi in miroval. (Ravnovesje je labilno, zato že poljubno majhen odmik iz ravnovesne lege povzroči gibanje plavača proč od ravnovesne lege.) [*Rešitev:* $v = 7\,\mathrm{cm/s}$]

    b) Koliko časa potrebuje plavač za zadnjo polovico poti? [*Rešitev:* $t = 1\,\mathrm{s}$]

27. Denimo, da skozi središče Zemlje izvrtamo tunel. Kako bi se gibalo telo v takšnem tunelu, če vemo, da se spreminja težni pospešek linearno z oddaljenostjo od središča Zemlje? V kolikšnem času bi doseglo južno poloblo? Za radij Zemlje vzemi 6400 km.

28. Na mirujoče telo z maso 1 kg prične delovati sila, ki je sorazmerna s korenom razdalje od začetne lege: $F = A\sqrt{s}$, $A = 3\,\mathrm{N/m^{1/2}}$ in ima konstantno smer. Kolikšno hitrost doseže telo, ko prepotuje razdaljo $s = 1\,\mathrm{m}$? Koliko časa potrebuje za to? [*Rešitev:* $v = 2\sqrt{A/3m}\,s^{3/4} = 2\,\mathrm{m/s}$, $t = 2\sqrt{3m/A}\,s^{1/4} = 2\,\mathrm{s}$]

29. Telo z maso 1 kg se giblje premo po gladki, rahlo valoviti podlagi. V okolici izhodišča se sila na telo spreminja s koordinato x kot $F = bx^2$, pri čemer je $b = 1\,\mathrm{N/m^2}$.

    a) Kolikšno hitrost doseže pri gibanju v smeri osi x, ko prepotuje razdaljo $s = 20\,\mathrm{cm}$, če na začetku v izhodišču miruje? [*Rešitev:* $v = \sqrt{2bs^3/3m}$]

    b) Koliko časa porabi za zadnjo polovico poti? [*Rešitev:* $t = \sqrt{6m/bs}(\sqrt{2} - 1)$]

30. Na mirujoče telo z maso 1 kg prične delovati sila $F = kx^{2/3}$, $k = 3\,\mathrm{kgm^{1/3}s^{-2}}$, pri čemer je x razdalja od začetne lege, in ima konstantno smer.

    a) Kolikšno hitrost doseže telo, ko prepotuje razdaljo $s = 1\,\mathrm{m}$? [*Rešitev:* $v = \sqrt{6k/5m}\,s^{5/6} = 1{,}9\,\mathrm{m/s}$]

    b) Koliko časa potrebuje za to? [*Rešitev:* $t = \sqrt{30m/k}\,s^{1/6}$]

31. Veliko težji delec privlaši lažjega z maso $3 \cdot 10^{-28}$ kg s silo $F = -K\, e^{-r/a}$, $K = 100\,\mathrm{N}$, $a = 1\,\mathrm{fm}$ ($= 10^{-15}$ m, 1 femtometer). Lažji na začetku miruje daleč proč od težjega.

   a) Kolikšno hitrost doseže lažji delec, ko se približa težjemu na razdaljo $r = 1\,\mathrm{fm}$? [*Rešitev:* $v = \sqrt{2Ka/m}\, e^{-r/2a}$]

   b) Kolikšen čas potrebuje za zadnji femtometer poti? [*Rešitev:* $t = \sqrt{2am/K}(e^{r/a} - e^{r/2a})$]

32. Verigo dolžine l postavimo na mizo tako, da preko roba mize visi kos verige z dolžino x_0. Verigo spustimo.

   a) Kako se spreminja hitrost verige v odvisnosti od njene lege (dolžine dela verige, ki visi preko mize)? [*Rešitev:* $v(x) = \sqrt{\frac{g}{l}(x^2 - x_0^2)}$]

   b) Kako je lega verige (dolžina dela verige, ki visi preko mize) odvisna od časa? [*Rešitev:* $t(x) = \sqrt{g/l}\ln\left(x/x_0 + \sqrt{(x/x_0)^2 - 1}\right)$, $x(t) = (1 + e^{2\sqrt{g/lt}})/(\frac{x_0}{2}e^{\sqrt{g/lt}})$]

   c) Kakšna pa sta $v(x)$ in $x(t)$, če upoštevamo še trenje? [*Rešitev:* $v(x) = \sqrt{\frac{g}{l}\left[(1 + k_{tr})(x^2 - x_0^2) + 2k_{tr}l(x - x_0)\right]}$, $x(t) = \frac{lk_{tr}}{1+k_{tr}} + \left(x_0 - \frac{lk_{tr}}{1+k_{tr}}\right)\sqrt{1 + \left(e^{\sqrt{g(1+k_{tr})/l}\,t} - 1\right)^2}$]

33. Verigo dolžine l obesimo preko škripca tako, da desno od škripca visi del verige dolžine x_0, levo od škripca pa del verige dolžine $l - x_0$. Verigo spustimo. Škripec se vrti brez trenja in ima majhen obseg v primerjavi z verigo. Verigo spustimo.

   a) Kako se spreminja hitrost verige v odvisnosti od njene lege (dolžine dela verige, ki visi na desni strani škripca)?

   b) Kako je lega verige (dolžina dela verige, ki visi na desni strani škripca) odvisna od časa?

34. Asteroid prileti iz zelo velike oddaljenosti ($r \to \infty$) v naše Osončje in leti naravnost proti Soncu. Zaradi gravitacijske sile Sonca ($F = -\kappa mM/r^2$) mu hitrost ves čas narašča. ($\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$)

   a) Kolikšna je hitrost asteroida, ki je v zelo veliki oddaljenosti miroval, ko se približa Soncu na razdaljo, na kakršni kroži okrog njega Zemlja ($1{,}5 \cdot 10^{11}$ m)? Masa Sonca je $2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg. [*Rešitev:* $v(x) = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = 42\,\mathrm{km/s}$]

   b) Koliko časa potuje asteroid od Zemljinega do Venerinega tira okrog Sonca, če je Venerina oddaljenost od Sonca 3/4 Zemljine? [k,3,2009/2010] [*Rešitev:* $v(x) = \frac{2}{3\sqrt{2GM}}(s_2^{3/2} - s_1^{3/2}) = 9{,}6\,\mathrm{dni}$]

35. Telo z maso 2 kg miruje v izhodišču. Nanj začne delovati sila, ki ima konstantno smer in jo podaja enačba $F = A\sqrt{x^3}$, pri čemer je konstanta $A = 5\,\mathrm{Nm^{-3/2}}$. Kolikšno hitrost ima telo, ko je od izhodišča oddaljeno 0,5 m? Koliko časa je potrebovalo za to pot? [i2,2,2010/2011] [*Rešitev:* $v = \sqrt{\frac{4}{5}\frac{A}{m}x^{5/2}} = 0{,}59\,\mathrm{m/s}, t = 2\sqrt{5m/A}\left(x_0^{-1/4} + x^{-1/4}\right)$]

36. Na mirujoče telo z maso 1 kg prične delovati sila $F = kx^{2/3}$, $k = 3\,\mathrm{kgm^{1/3}s^{-2}}$, pri čemer je x razdalja od začetne lege. Sila ima ves čas konstantno smer vzdolž x.

a) Kolikšno hitrost doseže telo, ko prepotuje razdaljo $s = 1\,\mathrm{m}$?

b) Koliko časa potrebuje za to? [i3,3,2011/2012]

37. V sredino metrske cevke, ki se s konstantno kotno hitrostjo $20\,\mathrm{s}^{-1}$ vrti okrog enega krajišča, prilepimo kamenček.

a) S kolikšno (radialno) hitrostjo izleti kamenček iz cevke, ko lepilo nenadoma popusti? Trenje zanemarimo. [*Rešitev:* $v = \omega\sqrt{r_2^2 - r_1^2} = 17{,}3\,\mathrm{m/s}$]

b) Koliko časa potrebuje kamenček za pot od polovice do konca cevke? *Koristna formula:* $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C$ [k1,3,2012/2013]
[*Rešitev:* $t = \omega^{-1}\ln\left(\frac{r_2+\sqrt{r_2^2-r_1^2}}{r_1}\right) = 0{,}031\,\mathrm{s}$]

Poglavje 7

Vektorji

1. Letalo ima v mirnem zraku hitrost 300 km/h. Leti tako, da je obrnjeno natančno proti vzhodu. Veter piha proti severovzhodu s hitrostjo 40 km/h. S kolikšno hitrostjo in v katero smer se giblje letalo?
   [*Rešitev:* 329,5 km/h v smeri 4,9° od vzhoda proti severu] [KK str. 54, nal. 1]

2. Na kroglico z maso 3 kg delujejo tri ravninske sile. Prva ima velikost 9 N in kaže, kamor pač kaže. Druga je trikrat manjša od prve in oklepa s prvo kot 120° v smeri urinih kazalcev glede na prvo silo. Tretja sila je dvakrat večja od druge in oklepa z drugo kot 60° v isti smeri kot druga s prvo.

   a) Poiščite rezultanto vseh treh sil (velikost in smer glede na prvo silo).
   [*Rešitev:* $F = 3\,\mathrm{N}$, kaže pod kotom 60° v smeri urinih kazalcev glede na prvo silo]

   b) Izračunajte še pospešek kroglice (smer in velikost).
   [*Rešitev:* $a = 1\,\mathrm{m/s}^2$, smer pospeška je enaka smeri rezultante]

3. Čolnar vesla s hitrostjo v glede na vodo v smeri pravokotno na hitrost reke, ki teče s hitrostjo u in je za $1/3$ večja od v. Širina reke je h.

   a) S kolikšno hitrostjo se giblje čoln glede na breg (velikost in smer)?
   [*Rešitev:* $w = 5v/3$, kot gibanja glede na tok reke je 36,9°]

   b) Kje na nasprotnem bregu bo čoln pristal in po kolikšnem času?
   [*Rešitev:* Na nasprotnem bregu bo pristal $4h/3$ daleč od starta v smeri toka, čas potovanja je h/v.]

4. Breme s težo 900 N visi na sredini 10 m dolge vrvi, pripete na strop v točkah, ki sta 8 m vsaksebi. Izračunajte silo, s katero je napeta vrv.
   [*Rešitev:* 750 N]

5. Masa m_1 je v točki $\mathbf{r}_1$, masa m_2 je v točki $\mathbf{r}_2$, m_3 je v točki $\mathbf{r}_3 \ldots$ in m_n je v točki $\mathbf{r}_n$. Izračunajte težišče sistema teh točkastih mas.
   [*Rešitev:* $\mathbf{r}^* = (1/m)\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i$, kjer je $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ masa celotnega sistema]

6. Jakost električnega polja dipola; naboja $+e$ in $-e$ sta na razdalji d. Postavimo koordinatni sistem tako, da je izhodišče na sredini med nabojema in gre os z skozi naboja, da je naboj $+e$ na negativni polosi z.

   a) Kolikšen je $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ za $r \gg d$? [*Rešitev:* $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{4\pi\epsilon_0 r^3}}\left(\mathbf{d} - \frac{\mathbf{3rd}}{\mathbf{r^2}}\mathbf{r}\right)$]

   b) Nariši v koordinatni sistem vsoto prispevkov jakosti električnega polja posameznega naboja in preveri, če se ta ujema z dobljenim rezultatom za električno polje dipola.

c) Kako je velikost jakosti električnega polja dipola odvisna od razdalje in od kota?
[*Rešitev:* Jakost električnega polja dipola pada z razdaljo kot $1/r^3$.]

7. Kepi ilovice trčita in se sprimeta. Prva kepa je imela maso 0,6 kg in hitrost 8 m/s, druga pa maso 0,4 kg in hitrost 10 m/s. Smeri hitrosti sta oklepali kot 30°. Kolikšna je hitrost sprimka? Kolikšen kot oklepa ta hitrost s smerjo začetne hitrosti težje kepe? Nalogo lahko rešiš na več načinov – enkrat postaviš os x koordinatnega sistema vzdolž vektorja hitrosti prve kepe ilovice, drugič vzdolž vektorja hitrosti druge kepe, tretjič vzdolž vektorja končne hitrosti. Poskusi! [Zbirka 23, s10, 1.6.4]

8. Drsalca ($m_1 = 60$ kg in $m_2 = 20$ kg) se gibljeta enako hitro ($v_0 = 2$ m/s) poševno pod kotom $2\alpha = 60°$ drug proti drugemu. Ko se srečata, se sprimeta. Kolikšna je njuna skupna hitrost (v) in v kateri smeri se gibljeta (pod kotom β glede na simetralo njunih začetnih smeri)? Nalogo lahko rešiš tudi na druge načine – namesto, da os x koordinatnega sistema postaviš vzdolž simetrale med hitrostma obeh drsalcev, lahko os x enkrat postaviš tudi vzdolž vektorja hitrosti prvega drsalca, drugič vzdolž vektorja hitrosti drugega drsalca, tretjič pa vzdolž vektorja končne hitrosti. Poskusi! [Kladnik: Fizika 1 (Meh. in topl.), s103, 5]
[*Rešitev:* $v = 1{,}8$ m/s, $\beta = 16°$]

9. Prvi zajec teče s hitrostjo 5 m/s proti severu, drugi pa s hitrosjo 8 m/s proti jugovzhodu. S kolikšno hitrostjo se drugi zajec oddaljuje od prvega? [k2,1,2011/2012]
[*Rešitev:* 12,1 m/s]

10. Lovec se pelje na prtljažniku džipa, ki vozi s hitrostjo 100 km/h. Če gledamo z vrha, vozi džip levo od ravne ceste pod kotom 30° glede na cesto in se od nje oddaljuje. Lovec ustreli s puško na levo pod pravim kotom glede na smer vožnje. Izstrelek izleti iz puške s hitrostjo 400 km/h glede na cev. S kolikšno hitrostjo in pod kolikšnim kotom se giblje izstrelek glede na cesto? [k2,1,2012/2013]
[*Rešitev:* 412 km/h, 106°]

Poglavje 8

Skalarni in vektorski produkt

1. Imamo dva vektorja, $\mathbf{a} = (3, 7, 1)$ in $\mathbf{b} = (2, -2, 3)$

   a) Izračunaj kot med vektorjema. [*Rešitev:* 99,1°]

   b) Izračunaj ploščino paralelograma, ki ga razpenjata vektorja (preveri, ali sta vektorja kolinearna). [*Rešitev:* 31,3]

   c) Določi enotski smerni vektor površine in zapiši površino v obliki $\mathbf{S} = S \cdot \hat{\mathbf{S}}$. [*Rešitev:* 31,3(0′73, –0′22, –0,64)]

2. Valj se enakomerno vrti okrog svoje simetrijske osi s kotno hitrostjo $\boldsymbol{\omega} = (3, 5, 1)\,\mathrm{s}^{-1}$.

   a) Kolikšen je radij valja, če kaže vektor $\mathbf{a} = (4, 5, 5)\,\mathrm{m}$ do točke na njegovem plašču? [*Rešitev:* $\mathbf{r} = (0'4,\ -1, 3'8)\,\mathrm{m}$, $r = 3{,}95\,\mathrm{m}$]

   b) Kakšna je hitrost te točke? [*Rešitev:* $\mathbf{v} = (20,\ -11,\ -5)\,\mathrm{m/s}$, $v = 23{,}4\,\mathrm{m/s}$]

   c) Kakšen je radialni pospešek v tej točki? [*Rešitev:* $\mathbf{a_r} = (-14, 35,\ -133)\,\mathrm{m/s^2}$, $a_r = 138\,\mathrm{m/s^2}$]

   d) Pokaži, da je radialni pospešek (v tej točki) pravokoten na hitrost in kotno hitrost.

3. Podani sta dve premici, $P1 = \mathbf{a} + t\mathbf{k_1}$ in $P2 = \mathbf{b} + t\mathbf{k_2}$, kjer so $\mathbf{a} = (1, 3, 2)$, $\mathbf{k_1} = (1, 4, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 3, 1)$ in $\mathbf{k_2} = (3, 5, 2)$. Poišči razdaljo med njima.
   [*Rešitev:* $1/\sqrt{3} = 0{,}58$]

4. Koščček gline z maso 100 g je v breztežnostnem prostoru z vrvico privezan na prstan, ki je nataknjen na dolge palico in drsi po njej brez trenja. Koordinatni sistem postavimo tako, da je os palice poravnana z osjo z, vrvica dolžine 10 cm pa je napeta vzdolž osi x. V koščček gline ustrelimo z zračno puško projektil z maso 10 g in hitrostjo $\mathbf{v} = (3, 2, 2)\,\mathrm{m/s}$ tako, da ta obtiči v glini. Opiši gibanje koščka gline s projektilom – kakšno je gibanje v smeri osi z in kakšno v smeri osi x in y.
   [*Rešitev:* $\omega = (0, 0, 1'82)\,\mathrm{s}^{-1}$, gibanje v ravnini xy je kroženje, v smeri osi z pa je gibanje enakomerno

5. Izpelji precesijsko frekvenco za vrtavko,

   a) če je smer navora pravokotna na smer vrtilne količine;

   b) če je med smerjo navora in smerjo vrtilne količine poljuben kot φ.

6. Kovanec zakotalimo z neko začetno hitrostjo, pri čemer je os vrtenja kovanca glede na vodoravnico nagnjena za kot φ. (Splošnejši primer je npr. vožnja bicikla "brez rok".) Kolikšen je radij krožnice, ki jo kovanec "riše" ob kotaljenju po ravni podlagi?

7. a) Preveri, ali sta vektorja $\mathbf{x} = (4, -3, 1)$ in $\mathbf{y} = (2, 5, 4)$ vzporedna.
   [*Rešitev:* $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (-17, -14, 26) \neq 0 \Longrightarrow$ vektorja nista vzporedna]

   b) Zapiši vektor $\mathbf{r} = (3, -2, -6)$ v obliki $\mathbf{r} = r \cdot \hat{\mathbf{r}}$, kjer je r dolžina vektorja, $\hat{\mathbf{r}}$ pa enotski vektor s smerjo vektorja $\mathbf{r}$. [*Rešitev:* $\mathbf{r} = 7(0'43, -0'29, -0'86)$]

   c) Izračunaj ploščino trikotnika, katerega dve stranici tvorita vektorja $\mathbf{a} = (0, -4, 3)$ in $\mathbf{b} = (-3, 5, 2)$.
   [*Rešitev:* 13,73]

   d) Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{b}$ na vektor $\mathbf{a}$ (vektorja sta podana v prejšnji točki).
   Velja $\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}}{a^2}$. [*Rešitev:* $\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = -\frac{14}{25}(0, 56, -42)$]
   [k2,1,2009/2010]

8. Podana sta vektorja za ročico in silo: $\mathbf{r} = (4, -5, 0)$ in $\mathbf{F} = (-2, 2, 1)$.

   a) Zapiši vektor $\mathbf{r}$ v obliki $\mathbf{r} = r \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$, kjer je r dolžina vektorja, $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$ pa enotski vektor s smerjo vektorja $\mathbf{r}$.

   b) Kolikšen je kot med vektorjema?

   c) Izračunaj navor sile $\mathbf{F}$, ki ima ročico $\mathbf{r}$.

   d) Poišči pravokotno projekcijo sile na ročico.
   [k2,1,2010/2011]

9. Silo na vodnik v magnetnem polju podaja enačba $\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$. Žica, po kateri teče tok 1 A, leži v magnetnem polju, ki ga podaja vektor $\mathbf{B} = (1, 2, 1)$ T. Žico podaja vektor $\mathbf{l} = (-3, 1, 1)$ m.

   a) Kako dolga je žica? [*Rešitev:* $\sqrt{11}$ m]

   b) Kolikšna je magnetna sila na vodnik? [*Rešitev:* $\mathbf{F} = (-1, 4, -7)$, $F = 66$ N]

   c) Zapiši enotski vektor, ki kaže v smeri sile. [*Rešitev:* $\hat{\mathbf{F}} = (-1/\sqrt{66}, 4/\sqrt{66}, -7/\sqrt{66})$]

   d) Poišči pravokotno projekcijo vektorja žice na vektor magnetnega polja. [*Rešitev:* $\mathbf{proj_B l} = 0$]
   [i1,2i,2011/2012]

10. Vektor $\mathbf{a} = (2, 2, 1)$ kaže do središča krogle, vektor $\mathbf{b} = (3, 3, 3)$ pa do točke na njenem plašču.

    a) Poišči vektor, ki kaže od središča krogle do točke na njenem plašču.

    b) Kolikšen je radij krogle?

    c) Ali sta vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ kolinearna (ležita na isti premici)? Če nista, poišči kot med njima.

    d) Poišči vektor, ki je pravokoten na vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ in ima dolžino enako radiju krogle.
    [i3,4,2011/2012]

11. Sila na električno nabit delec v magnetnem polju je podana z enačbo $\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Vzemimo, da je naboj delca 1 C, delec pa prileti v magnetno polje s hitrostjo $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$ m/s. Sila na delec je enaka $\mathbf{F} = (2, 3, -8)$ N.

    a) Poišči vektor magnetnega polja. (Možnih je več rešitev.) [$\mathbf{B_1} = (3, -2, 0)$, $\mathbf{B_2} = (2, 3, -8)$ ...]

    b) Poišči vektor magnetnega polja, če je podana dodatna zahteva, da je smer magnetnega polja pravokotna na smer hitrosti nabitega delca. [$\mathbf{B} = (19/6, -10/6, 1/6)$]
    [k2,3,2012/2013]

Poglavje 9

Polarni, cilindrični, sferični koordinatni sistem

1. Izračunaj jakost električnega polja na osi enakomerno nabite krožne zanke z radijem R in celotnim nabojem e v:

   a) kartezičnem koordinatnem sistemu

   b) cilindričnem koordinatnem sistemu

Poglavje 10

Transformacije vektorjev, tenzorji

1. Pokaži, da dá vrtež za φ, ki mu sledi vrtež za $-\varphi$ okrog iste osi, identiteto.

2. S kombinacijo dveh vrtežev za poljubna kota okrog iste osi izpelji adicijske izreke.

3. Razišči, kako vidi opazovalec gibanje ključev, ki na vrvici vrti deček v ravnini, ki je za kot φ nagnjena glede na vodoravna tla. (Podobno bi videl opazovalec na mestu Sonca gibanje Lune okrog Zemlje, če bi gledal ves čas v smeri proti Zemlji. Ravnina poti Lune okrog Zemlje je glede na ekliptiko nagnjena za 6°.)

4. Podana je kotna hitrost $\boldsymbol{\omega} = (1, 3, 3)\,\mathrm{s}^{-1}$ in tenzor vztrajnostnega momenta

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathrm{kg\,m}^2.$$

   Vrtilno količino izračunamo po enačbi $\mathbf{\Gamma} = \underline{J}\boldsymbol{\omega}$. Poišči kot, ki ga oklepa vektor kotne hitrosti z vektorjem vrtične količine. [kp,2i,2009/2010]
   [*Rešitev:* $\mathbf{\Gamma} = (10, 6, 6)\,\mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}$, $\varphi = 36°$]

5. Za neko snov je znan napetostni tenzor, ki je v lastnem koordinatnem sistemu enak

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{N/m}^2.$$

   Iz te snovi izžagamo kvader tako, da tri pravokotne stranice kvadra sovpadajo z lastnimi osmi koordinatnega sistema snovi.

   a) Izračunaj silo na ploskev, ki je podana z normalo $\mathbf{S} = (2, 4, \,-1)\,\mathrm{m}^2$. Silo izračunaš po enačbi $\mathbf{F} = \underline{\sigma}\mathbf{S}$.
   b) Poišči kot, ki ga oklepa sila z vektorjem normale na površino!

   [i2,3,2009/2010]

6. Podana sta dva vektorja: $\mathbf{a} = (1,\ -1,\ 0)$ in $\mathbf{b} = (1,\ 1,\ 1)$.

   a) Kolikšna je ploščina paralelograma, ki ga razpenjata vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$?
   [*Rešitev:* $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-1,\ -1,\ 2)$, $p = \sqrt{6} = 2{,}45$]
   b) Zapiši tenzor za rotacijo vektorja okrog osi z za 90°. [*Rešitev:* $\underline{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$]

c) Poišči vektor **a'**, ki ga dobiš tako, da vektor **a** zavrtiš okrog osi z za $90°$. [*Rešitev:* **a'** $= (1, 1, 0)$]

d) Kolikšen je kot med vektorjema **a'** in **b**? [*Rešitev:* $\varphi = 35{,}3°$]

[k2,2,2011/2012]

Poglavje 11

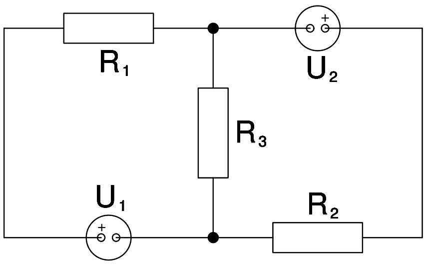
Reševanje sistemov enačb, iskanje inverznih matrik, lastnih vrednosti in lastnih vektorjev

1. Reši sistem enačb za tokove v vezju na spodnji sliki na dva načina:

   a) z Gaussovo eliminacijo za enačbo $\underline{\mathbf{R}}\ \mathbf{I} = \mathbf{U}$

   b) z določitvijo inverzne matrike v enačbi $\mathbf{I} = \underline{\mathbf{R}}^{\mathbf{-1}}\mathbf{U}$

   Vrednosti izvirov napetisto in uporov so naslednje: $U_1 = 5\,\mathrm{V}$, $U_2 = 10\,\mathrm{V}$, $R_1 = 15\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $R_3 = 25\,\Omega$.



   [*Rešitev:* $\mathbf{I} = \frac{1}{47}\begin{bmatrix} 19 \\ 21 \\ 2 \end{bmatrix}$ A]

2. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje za matriki

   a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

   [*Rešitev:* a) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 1, \mathbf{l_1} = (1,\ -5,\ -13'5), \mathbf{l_2} = (0,1,2), \mathbf{l_3} = (0,0,1)$
   b) $\lambda_1 = 3, \lambda_{2,3} = -1, \mathbf{l_1} = (2,1,2), \mathbf{l_{2,3}} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -0'5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$ npr. $\mathbf{l_2} = (-1,0,1), \mathbf{l_3} = (-0'5,1,0)$]

3. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

   $$\begin{bmatrix} 1 & h & 0 \\ h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

[*Rešitev:* $\lambda_1 = k, \lambda_2 = 1 - h, \lambda_3 = 1 + h, \mathbf{l_1} = (0,0,1), \mathbf{l_2} = (-1,1,0), \mathbf{l_3} = (1,1,0)$]

4. Podana je matrika $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ in vektor $\mathbf{x} = (1, -2, 1)$.

   a) Poišči vektor $\mathbf{y} = \mathrm{A}\mathbf{x}$. [*Rešitev:* $\mathbf{y} = (1,\ -5, 15)$]

   b) Za kolikokrat matrika A podaljša ali skrajša vektor $\mathbf{x}$? [*Rešitev:* $y/x = 6{,}5$]

   c) Za kolikšen kot zavrti matrika A vektor $\mathbf{x}$? [*Rešitev:* $\varphi = 47{,}9°$]

   d) Ali je vektor $\mathbf{v} = (1,1,0)$ lastni vektor matrike A? Odgovor utemelji! [*Rešitev:* da]

[k2,2,2009/2010]

5. Reši naslednji sistem enačb z metodo Gaussove eliminacije:

$$\begin{aligned} 5x + 3y - 3z &= -1 \\ 3x + 2y - 2z &= -1 \\ 2x - 1y + 2z &= 8 \end{aligned}$$

   [*Rešitev:* $x = 1, y = 2, z = 4$] [kp,2ii,2009/2010]

6. Preveri, ali je vektor $\mathbf{x} = (-2, 4, 1)$ lastni vektor matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

   Če je, poišči tudi pripadajočo lastno vrednost. [i1,2,2009/2010]
   [*Rešitev:* da, $\lambda = -5$]

7. Z Gaussovo eliminacijsko metodo reši naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} -x + y + 2z &= 2 \\ 3x - y + z &= 6 \\ -x + 3y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

   [*Rešitev:* $x = 1, y = -1, z = 2$] [i3,2,2009/2010]

8. Podana je normala na ploskev $\mathbf{S} = (2, 4, -1)\,\mathrm{m}^2$ in napetostni tenzor

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{N/m}^2.$$

   a) Izračunaj silo na podano ploskev; silo na ploskev izračunamo po enačbi $\mathbf{F} = \underline{\sigma}\mathbf{S}$.
   [*Rešitev:* $\mathbf{F} = (20, 16,\ -1)\,\mathrm{N}$]

   b) Poišči smerni vektor (tj. enotski vektor) normale na ploskev in enotski vektor sile.
   [*Rešitev:* $\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2, 4,\ -1), \hat{\mathbf{F}} = \frac{1}{\sqrt{657}}(20, 16,\ -1)$]

   c) Z rezultatoma iz točke b) izračunaj kot, ki ga oklepa sila z vektorjem normale na površino!

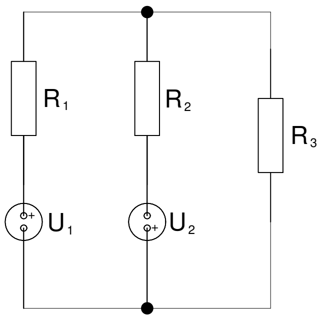
   [*Rešitev:* $\varphi = 26{,}6°$]

d) Preveri, če je vektor $\mathbf{x} = (1, 1, 0)$ lastni vektor napetostnega tenzorja $\underline{\sigma}$. Če je, poišči tudi pripadajočo lastno vrednost. (Vprašanje ni povezano s prejšnjimi tremi podtočkami.) [*Rešitev:* da, $\lambda = 6$]

[i3,3,2009/2010]

9. V nekem koordinatnem sistemu je tenzor vztrajnostnega momenta za neko telo enak $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Poišči vztrajnostne momente tega telesa v lastnem koordinatnem sistemu tenzorja vztrajnostnega momenta (t.j. poišči lastne vrednosti). Poišči tudi prehodno matriko (t.j. lastne vektorje).
[*Rešitev:* $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 5, \mathbf{l_1} = (-2, 2, 1), \mathbf{l_2} = (-0, -1, 2), \mathbf{l_3} = (5, 4, 2)$]
[k2,2,2010/2011]

10. Z metodo Gaussove eliminacije poišči tokove, ki tečejo skozi upore R_1, R_2 in R_3. Vrednosti upornikov so $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$ in $R_3 = 1\,\Omega$, vrednosti napajalnih napetosti pa $U_1 = 6\,\mathrm{V}$ in $U_2 = 2\,\mathrm{V}$.



[kp,2ii,2010/2011][i1,3,2010/2011][i1,2ii,2012/2013]

11. Podan je tenzor vztrajnostnega momenta za neko telo:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathrm{kgm}^2$$

a) Kolikšen je kot med osjo vrtenja, ki jo podaja vektor $\boldsymbol{\omega} = (0, 1, 1)\,\mathrm{s}^{-1}$, in vrtilno količino?

b) Ali na os deluje kakšen navor, če vrtimo telo okrog osi $\boldsymbol{\omega} = (-2, 1, 0)\,\mathrm{s}^{-1}$ Odgovor utemelji!

c) Poišči osi, okrog katerih bi morali vrteti telo, da nanje pri vrtenju ne bi deloval navor.

[i1,2,2010/2011]

12. Podan je vektor $\mathbf{x} = (0, 1, -1)$ in matrika:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Kolikokrat daljši (ali krajši) je vektor, ki ga dobimo, če z matriko A delujemo na vektor $\mathbf{x}$?

[*Rešitev:* $3/\sqrt{2}\times = 2{,}12\times$]

b) Za kolikšen kot je matrika A zasukala vektor x? [*Rešitev:* $\varphi = 90°$]

c) Koliko znaša pravokotna projekcija zasukanega vektorja na vektor $\mathbf{x}$? [*Rešitev:* $\mathbf{proj_y x} = 0$]

d) Ali je vektor $\mathbf{p} = (-1, 1, 0)$ lastni vektor matrike A? [*Rešitev:* da, $\lambda = -1$]

[i2,3,2010/2011] [i3,4,2012/2013]

13. Podana sta vektorja $\mathbf{a} = (-2, 3, 12)$ in $\mathbf{b} = (6,\ -7,\ -6)$, ki vodita od izhodišča do točk A in B.

   a) Kako oddaljena je točka A od točke B?

   b) Kolikšen je kot med vektorjema?

   c) Kolikšna je ploščina trikotnika, ki ga razpenjata vektorja?

   d) Ali je kateri izmed vektorjev lastni vektor matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 12 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}?$$

[i3,3,2010/2011]

14. Tenzor vztrajnostnega momenta za neko telo je v danem koordinatnem sistemu enak

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{kgm}^2.$$

Poišči vztrajnostne momente telesa pri vrtenju okrog osi lastnega koordinatnega sistema (t.j. lastne vrednosti) in kam te osi v prvotnem koordinatnem sistemu kažejo (t.j. lastne vektorje). [k2,3,2011/2012]

[*Rešitev:* $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5, \mathbf{l_1} = (2, -1, 0), \mathbf{l_2} = (0, 0, 1), \mathbf{l_3} = (1, 2, 0)$]

15. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}464 & -3 \\ 0 & 3 & 3{,}464 \end{bmatrix}.$$

Z matriko delujemo na vektor $\mathbf{x} = (0,\ 1,\ 0)$.

   a) Za kolikšen kot in okrog katere osi zavrti matrika A vektor $\mathbf{x}$? [*Rešitev:* za $41°$ okrog osi x]

   b) Za kolikokrat matrika vektor podaljša? [*Rešitev:* $4{,}6\times$]

   c) Poišči vsaj en lastni vektor matrike A. [*Rešitev:* $\lambda_1 = 4, \mathbf{l_1} = (1, 0, 0)$]

[k2,2,2012/2013]

16. Dana je matrika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ in vektor $\mathbf{x} = (1,\ 2,\ 3)$.

   a) Ali je vektor $\mathbf{x}$ pravokoten na vektor $\mathbf{a} = (1,\ 1,\ -1)$?

   b) Ali je vektor $\mathbf{x}$ lastni vektor matrike A?

   c) Za kolikšen kot zavrti matrika A vektor $\mathbf{x}$?

   d) Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{x}$ na vektor $\mathbf{b} = (1,\ 1,\ 1)$. Velja $\mathbf{proj_a b} = \frac{\mathbf{(a \cdot b) a}}{a^2}$.

[i1,2i,2012/2013]

Poglavje 12

Tenzorji: Uporaba in transformacije – fizikalni zgledi

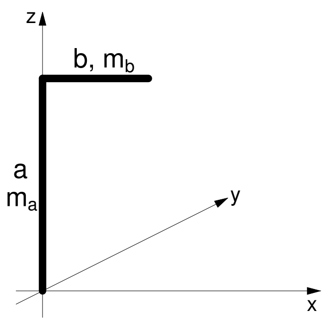
12.1 Tenzor vztrajnostnega momenta

1. Pokaži, kako se transformira tenzor iz enega v drug koordinatni sistem. Pokaži uporabo transformacije tenzorja pri računanju vrtilne količine kvadra, ki ga vrtimo okrog poljubne (ne simetrijske) osi. Pri tem je:

$$J_{\text{kvadra}} = \frac{m}{12}\begin{bmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}.$$

2. Zapiši tenzor vztrajnostnega momenta za telo, ki je sestavljeno iz dveh kosov žice, kot je prikazano na sliki. Dolžini palic sta $a = 2\,\mathrm{m}$ in $b = 1\,\mathrm{m}$, masi pa $m_a = 2\,\mathrm{kg}$ in $m_b = 1\,\mathrm{kg}$. Poišči smeri osi, okrog katerih lahko telo vrtimo, ne da bi to povzročalo navor v ležaju. Tenzor vztrajnostnega momenta bo tedaj diagonalen – vsi izvendiagonalni elementi, ki predstavljajo deviacijske momente, bodo enaki nič. Poišči tudi vztrajnostne momente (t.j. lastne vrednosti oz. diagonalne elemente tenzorja vztrajnostnega momenta v njegovem lastnem sistemu).

$$J_{\text{spl.}} = \begin{bmatrix} \int (y^2+z^2)\mathrm{d}m & -\int xy\ \mathrm{d}m & -\int xz\ \mathrm{d}m \\ -\int yx\ \mathrm{d}m & \int (x^2+z^2)\mathrm{d}m & -\int yz\ \mathrm{d}m \\ -\int zx\ \mathrm{d}m & -\int zy\ \mathrm{d}m & \int (x^2+y^2)\mathrm{d}m \end{bmatrix}$$



3. Izračunaj tenzor vztrajnostnega momenta za palico v koordinatnem sistemu, v katerem palica tvori z osjo x kot $30°$. Računaj na dva načina:

   a) direktno in

   b) v koordinatnem sistemu, v katerem je palica vzporedna z osjo x, ki ga nato zasučeš za podani kot.

4. Izračunaj tenzor vztrajnostnega momenta telesa v obliki črke L, pri čemer sta dolžini krakov 40 cm in 20 cm, njuni masi pa 0,40 kg in 0,20 kg. Tenzor zapiši v težiščnem sistemu (najprej poišči, kje je težišče, nato pa vanj postavi izhodišče koordinatnega sistema).

5. Telo je sestavljeno iz dveh enakih krogel, ki se dotikata. Radij vsake krogle je 10 cm in masa 3 kg. Telo se vrti s kotno hitrostjo $\omega = 10\,\mathrm{s}^{-1}$ okoli osi, ki gre skozi težišče sistema in tvori z zveznico središče krogel kot 60°.

   a) Kolikšen kot tvori vrtilna količina z osjo vrtenja? [*Rešitev:* 20,6°]

   b) Kolikšen je vztrajnostni moment telesa okoli osi vrtenja? [*Rešitev:* $23mr^2/10 = 0{,}069\,\mathrm{kgm}^2$]

6. Enak problem kot zgoraj: Homogena lesena krogla z radijem $R = 20$ cm in maso $M = 20$ kg, je prebodena z jekleno palico z dolžino $l = 4R$ in maso $m = 1$ kg, tako da središči krogle in palice sovpadata. Telo se vrti s kotno hitrostjo $\omega = 10\,\mathrm{s}^{-1}$ okoli osi, ki tvori s palico kot 60°. Zapiši tenzor vztrajnostnega momenta za telo na spodnji sliki. Poišči smeri, okrog katerih lahko vrtimo telo, ne da bi to povzročalo navor na ležaj. Poišči vztrajnostne momente, če telo vrtimo okorg iskanih treh osi.

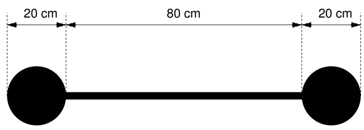
7. Zapiši tenzor vztrajnostnega momenta za sistem točkastih mas, ki ga vrtimo okrog koordinatnega izhodišča. Poišči vztrajnostne momente v koordinatnem sistemu (t.j. lastne vrednosti tenzorja), v katerem sistem nima deviacijskih momentov in zapiši še vektorje pripadajočih osi vrtenja (t.j. lastne vektorje).

   - 1. masa: $m_1 = 3$, $\mathbf{r_1} = (1{,}0{,}1)$
   - 2. masa: $m_2 = 4$, $\mathbf{r_2} = (1{,}1{,}-1)$
   - 3. masa: $m_3 = 2$, $\mathbf{r_3} = (-1{,}1{,}0)$

8. Dve krogli s premerom 0,2 m in maso 1 kg sta povezani s tanko 80 cm palico, ki ima maso 0,5 kg.

   a) Zapiši tenzor vztrajnostnega momenta za opisani sistem krogel in palice za vrtenje okrog težišča v lastnem sistemu.

   b) Zapiši še tenzor vztrajnostnega momenta za vrtenje opisanega sistema okrog osi, ki je za 30° nagnjena glede na palico.



[k2,3,2010/2011]

9. Podan je tenzor vztrajnostnega momenta za neko telo:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{kgm}^2$$

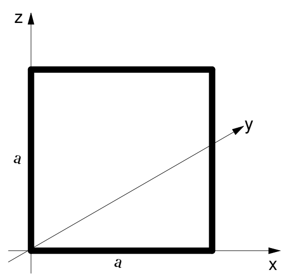
   a) Kolikšen je kot med osjo vrtenja, ki jo podaja vektor $\boldsymbol{\omega} = (0, 1, 1)\,\text{s}^{-1}$, in vrtilno količino?

   b) Ali na os deluje kakšen navor, če vrtimo telo okrog osi $\boldsymbol{\omega} = (-2, 1, 0)\,\text{s}^{-1}$ Odgovor utemelji!

   c) Poišči osi, okrog katerih bi morali vrteti telo, da nanje pri vrtenju ne bi deloval navor.

[i1,2,2010/2011]

10. Zapiši tenzor vztrajnostnega momenta za žičnat okvir na spodnji sliki. Masa žice z dolžino a je m.



[i2,3,2010/2011]

11. Zapiši tenzor vztrajnostnega momenta za kos dvakrat upognjene žice na sliki. Pri tem je [i2,4,2011/2012] $a = 1\,\text{dm}$, masa žice z dolžino a pa 1 kg.

12. Telo je sestavljeno iz dveh enakih krogel, ki se dotikata. Radij vsake krogle je 10 cm in masa 3 kg. Telo se vrti s kotno hitrostjo $10\,\text{s}^{-1}$ okoli osi, ki gre skozi težišče sistema in tvori z zveznico skozi središče krogel kot 60°.

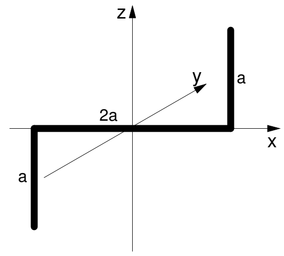
   a) Poišči vztrajnostni moment nastalega zlepka pri vrtenju okrog vseh treh osi lastnega koordinatnega sistema in zapiši tenzor vztrajnostnega momenta.
   [$J_{xx} = \frac{4}{5}mr^2 = 0{,}024\,\text{kgm}^2$, $J_{yy} = J_{zz} = \frac{14}{5}mr^2 = 0{,}084\,\text{kgm}^2$]

   b) Kolikšen kot tvori vrtilna količina z osjo vrtenja? [$\omega = \omega(\cos\varphi, 0, \sin\varphi) = (5, 0, 8'7)\,\text{s}^{-1}$,

   $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{J}\cdot\omega = (0'12, 0, 0'73)\,\text{kgm}^2\text{s}^{-1}$, $\vartheta = 20°$]

Koristna formula: $J_{\text{krogle}} = \frac{2}{5}mr^2$

[i2,3,2012/2013]



12.2 Ostali fizikalni zgledi

13. Na kovinski plošči, ki ima temperaturo 100 °C, leži 5 cm debela lesena deska, ki je rezana pod kotom $\varphi = 30°$ glede na lesna vlakna. Na zgornjo ploskev deske je pritisnjena 5 mm debela plast ledu. V kolikšnem času se stali ves led? Toplotna prevodnost lesa vzdolž vlaken je $\lambda_{\parallel} = 0{,}35\,\mathrm{W/mK}$, prečno na vlakna pa $\lambda_{\perp} = 0{,}14\,\mathrm{W/mK}$. Poišči najprej toplotni tok, ki teče skozi desko s površino S. Zapiši tenzor toplotne prevodnosti v njegovem lastnem sistemu. Nalogo reši na dva načina:

    a) v lastnem sistemu tenzorja toplotne prevodnosti in
    b) v lastnem sistemu deske.

14. Neka anizotropna snov ima glavne dielektričnosti $\epsilon_1 = 1{,}5$, $\epsilon_2 = 2{,}5$ in $\epsilon_3 = 3$. V snovi ustvarimo takšno električno polje, da oklepa $\mathbf{E}$ enake kote z vsemi tremi glavnimi smermi. Kolikšen kot oklepata vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$?

15. Na koncu 1 mm debele žice visi utež z maso 10 kg. Zapiši tlačni tenzor v žici! Kolikšna je strižna napetost v ravnini, ki je k osi žice nagnjena za 45°? [KK str. 91, nal. 2]

16. Gumijasta opna z debelino 1 mm je v svoji ravnini izotropno raztegnjena z napetostjo $\gamma = 1\,\mathrm{N/m}$. Kakšen je tlačni tenzor v opni? Kolikšna je strižna napetost v ravnini, ki je nagnjena za 45° k normali na opno?
    [KK str. 92, nal. 3]

17. Kalcit kristalizira v romboedrih (enakorobih paralelpipedih). V smeri trištevne osi (po krajši telesni diagonali) ima tak kristal dielektričnost 7,56, v pravokotnih smereh pa 8,49. Kako stoji vektor $\mathbf{D}$, kadar je jakost polja nagnjena za 45° k trištevni osi? [KK str. 92, nal. 4]

18. Prostor med dvema razsežnima vzporednima elektrodama v razmiku 1 cm je izpolnjen z anizotropno snovjo, katere lastne vrednosti specifičnega upora so 15, 10 in 10 Ωm. Lastni vektor, ki pripada prvi lastni vrednosti, je nagnjen za 45° k normali na elektrodo. Kolikšen tok na cm^2 teče med elektrodama pri napetosti 100 V? [KK str. 92, nal. 5]

19. Kako zapišemo kapaciteto ploščatega kondenzatorja, če je prostor med elektrodama napolnjen z anizotropno snovjo in noben od lastnih vektorjev dielektričnega tenzorja ne kaže pravokotno na plošči?
    [KK str. 92, nal. 6]

20. Gostoto toplotnega toka skozi snov opisuje enačba $\mathbf{j} = -\underline{\lambda}\,\mathbf{grad}\,T$, kjer je $\underline{\lambda}$ tenzor toplotne prevodnosti, $\mathbf{grad}\,T$ pa gradient temperature. Poišči, kolikšen je kot med smerjo gostote toplotnega toka in gradientom temperature, če je

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} 120 & 50 & 30 \\ 50 & 60 & 40 \\ 30 & 40 & 60 \end{bmatrix}\ \mathrm{W/mK} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{grad}\,T = (20, 5, 5)\,\mathrm{K/m}.$$

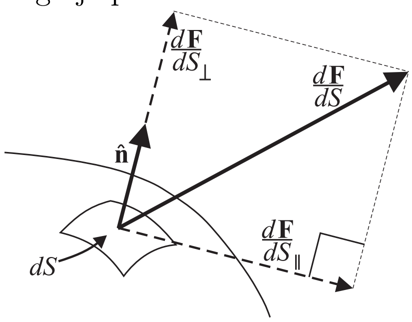
Z uporabo enačbe $P = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S}$ izračunaj še, kolikšen toplotni tok teče skozi ploskev $\mathbf{S} = (72, 64, 64)\,\mathrm{cm}^2$.

[i1,3,2009/2010]

21. Napetost v homogeni izotropni snovi opišemo v kartezičnem koordinatnem sistemu x, y, z z napetostnim tenzorjem

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} ,$$

kjer so vrednosti v matriki po velikosti $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$. Poljubno ploskev $d\mathbf{S}$ v snovi opišemo z velikostjo dS in s smerjo pravokotnice, ki jo opisuje enotski vektor $\hat{\mathbf{n}}$ s komponentami $\hat{\mathbf{n}} = (n_1,n_2,n_3)$, $d\mathbf{S} = dS\hat{\mathbf{n}}$. Silo na poljubno ploskev izračunamo kot produkt napetostnega tenzorja in ploskve $d\mathbf{F} = \underline{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$. Silo $d\mathbf{F}$ oziroma gostoto sile $d\mathbf{F}/dS$ lahko razstavimo na pravokotno $\left(\frac{d\mathbf{F}}{dS}\right)_\perp$ in tangencialno $\left(\frac{d\mathbf{F}}{dS}\right)_\parallel$ komponento, prva je vzporedna vektorju $\hat{\mathbf{n}}$, druga je pravokotna na vektor $\hat{\mathbf{n}}$.



a) Za poljubno ploskev dS z normalo $\hat{\mathbf{n}}$ izrazi s $\underline{\sigma}$ in $\hat{\mathbf{n}}$ pravokotno $\left(\frac{d\mathbf{F}}{dS}\right)_\perp$ in tangencialno $\left(\frac{d\mathbf{F}}{dS}\right)_\parallel$ komponento gostote sile $\frac{d\mathbf{F}}{dS}$.

b) Poišči smerni vektor $\hat{\mathbf{n}}$ ploskve, na kateri je pravokotna komponenta gostote sile $\left(\frac{d\mathbf{F}}{dS}\right)_\perp$ največja.

[k3,3,2009/2010]

Poglavje 13

Funkcije več spremenljivk

1. Nitno nihalo dolžine 20 cm niha v Zemljinem težnostnem polju, $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$. Za koliko % se spremeni lastna frekvenca nihala, če se nit podaljša za 1 mm, od Zemlje pa se oddaljimo toliko, da se težni pospešek zmanjša za $0{,}1\,\mathrm{m/s^2}$?
2. Viskoznost tekočine lahko izmerimo tako, da vanjo spustimo kroglico in izmerimo končno hitrost, pri kateri se padanje kroglice ustali. Enačba za izračun viskoznosti je v tem primeru $\eta = 2gr^2(\rho - \rho')/9v$. Poišči, kako je viskoznost odvisna od majhne spremembe fizikalnih količin, ki nastopajo v enačbi. Zapiši tudi, kako je napaka viskoznosti odvisna od napake posameznih fizikalnih količin v enačbi.
3. Kilomol plina ima pri 0 °C in 1,01 bar prostornino $22{,}4\,\mathrm{m^3}$. Za koliko se spremeni prostornina, če se zviša temperatura za 0,1 °C, tlak pa za 10^{-4} bar?
   [*Rešitev:* $\Delta V = 6\ dm^3$]
4. Zapiši relativno spremembo dolžine za napeto žico v odvisnosti od temperature in sile kot totalni diferencial.
5. Kako je relativna sprememba prostornine odvisna od sočasne spremembe temperature telesa in zunanjega tlaka?
6. Upor platinaste žice se spreminja kot $\mathrm{d}R/R = \alpha_R\,\mathrm{d}T$, $\alpha_R = 0{,}00394\,\mathrm{K^{-1}}$. Kako se spreminja specifični upor? Linearna razteznost platine je $\alpha_l = 9 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}$. (Velja $R = \zeta l/S$, $\mathrm{d}l/l = \alpha_l \mathrm{d}T$; razmisli, kako je relativna sprememba prečnega preseka, $\mathrm{d}S/S$ odvisna od α_l in $\mathrm{d}T$.)
7. Viskozno tekočino pretakamo po valjasti cevi in računamo viskoznost iz enačbe $\Phi_V = \pi r^4 \Delta p/8\eta l$. Za koliko se spremeni Φ_V, če se r poveča za 1%, Δp za 2%, η za 0,5% in l za 1%?
8. Določi gostoto in njeno efektivno napako za telo v obliki valja iz naslednjih merskih podatkov: $m = 2\,\mathrm{kg} \pm 5\,\mathrm{g}$, $r = 12\,\mathrm{cm} \pm 0{,}3\,\mathrm{mm}$, $h = 2{,}5\,\mathrm{cm} \pm 0{,}1\,\mathrm{mm}$.
   [*Rešitev:* $\rho = 1770\,\mathrm{kg/m^3}$,$\sigma_\rho/\rho = 0{,}007$]
9. Določi vztrajnostni moment okrog geometrijske osi in njegovo efektivno napako za valjasto telo iz tehle podatkov: $\rho = (1{,}77 \pm 0{,}07)\,\mathrm{g/cm^3}$, $r = 12\,\mathrm{cm} \pm 0{,}3\,\mathrm{mm}$, $h = 2{,}5\,\mathrm{cm} \pm 0{,}1\,\mathrm{mm}$.
   [*Rešitev:* $J = 0{,}029\,(1 \pm 0{,}006\,\mathrm{kgm^2}$]
10. Pri lomu svetlobe iz zraka v neko snov izmerimo kota $\alpha = 65° \pm 0{,}5°$ ter $\beta = 35° \pm 0{,}3°$. Kolikšen je lomni kvocient n in kolikšna njegova efektivna napaka? (Velja $n = \sin\alpha/\sin\beta$.)
    [*Rešitev:* $n = 1{,}580 \pm 0{,}013$]
11. Na absorber v obliki ploščice z debelino $x = (5{,}00 \pm 0{,}05)\,\mathrm{cm}$ pravokotno vpada tok enobarvne svetlobe $(1{,}2 \pm 0{,}1)\,\mathrm{kW}$, ki se pri izstopu iz plošče oslabi na $(0{,}4 \pm 0{,}02)\,\mathrm{kW}$.

Kolikšna sta absorpcijski koeficient μ in njegova efektivna napaka? (Velja $P = P_0 e^{-\mu x}$.) [*Rešitev:* $\mu = (0{,}22 \pm 0{,}02)\,\mathrm{cm}^{-1}$]

12. Po Stefanovem zakonu je toplotna moč, ki jo seva segreta krogla, enaka $P = \sigma 4\pi r^2 T^4$. Vzemimo, da smo pri nekem poskusi izmerili celotno toplotno moč (P), ki jo krogla oddaja, in njen radij (r). Iz teh dveh podatkov želimo izračunati njeno temperaturo. Zapiši, kako je sprememba temperature odvisna od majhnih sprememb radija in izsevane moči. Zapiši tudi izraz za izračun relativne napake temperature.

[k3,1,2010/2011]

13. Kvadratni zakon upora je podan z enačbo $F_u = \frac{1}{2} c_v \rho v^2 S$. Za koliko se spremeni sila upora ob majhnih spremembah koeficienta upora (c_v), gostote in hitrosti? Zapiši tudi enačbo za računanje napake sile upora!

[kp,1i,2010/2011]

14. Jahač na zračni drči zavira magnetna sila, ki je premo sorazmerna s hitrostjo. Pospešek jahača lahko zapišemo z enačbo $a = -\beta v$.

    a) Poišči enačbo, ki opisuje, kako se hitrost jahača, ki ga poženemo z začetno hitrostjo v_0, spreminja s časom.

    b) Kako pa je od časa odvisna pot, ki jo opravi jahač?

    c) Zapiši še, kako se spremeni hitrost ob majhnih spremembah časa in začetne hitrosti.

[i1,1,2010/2011]

15. Gibanje elektronov v ploščatem kondenzatorju oz. odvisnost koordinate y od koordinate x podaja enačba $y = \frac{Ux^2}{4U_0 l^2}$. Pri tem je U napetost na kondenzatorju, U_0 pospeševalna napetost elektronov in l razdalja med ploščama kondenzatorja. Za koliko % se elektronom spremeni koordinata y pri danem x, če pospeševalno napetost povečamo za 0,5%, razdaljo med ploščama pa zmanjšamo za 0,75%? Računaj z majhnimi spremembami! Zapiši še enačbo za relativno napako koordinate y. [i2,1,2010/2011]
[*Rešitev:* $\mathrm{d}y/y = \mathrm{d}U/U - 2\mathrm{d}l/l = 1\ \%, (\mathrm{d}y/y)^2 = (\mathrm{d}U/U)^2 + 4(\mathrm{d}x/x)^2 + (\mathrm{d}U_0/U_0)^2 + 4(\mathrm{d}l/l)^2$]

16. Pri torzijski obremenitvi palice je njen zasuk podan z enačbo $\varphi = \frac{2Ml}{G\pi r^4}$. Pri tem je M navor, ki deluje na palico, G strižni modul, l dolžina palice, r pa njen polmer.

    a) Za koliko % se spremeni zasuk palice, če se zaradi povišane temperature G zmanjša za 0,5%, l in r pa se povečata za 0,25%? Računaj z majhnimi spremembami.

    b) Zapiši še enačbo za relativno napako zasuka φ. [i3,1,2010/2011]

17. Hitrost izstrelka lahko določimo s pomočjo balističnega nihala po enačbi $v_0 = \frac{m+M}{m}\sqrt{gl}\,\varphi$. Za koliko % se spremeni odklon nihala, če vrvico, na kateri visi klada nihala, skrajšamo za 0,5%? (Hitrost izstrelka je nespremenjena.) Najprej zapiši totalni diferencial enačbe za hitrost izstrelka! [k3,1a,2009/2010]

18. Domet izstrelka pri poševnem metu izračunamo po enačbi $D = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\varphi$. Znana sta v_0 in φ ter njuni napaki. Zapiši enačbo za računanje relativne napake dometa! [k3,1b,2009/2010]

19. Upogib ravne palice s kvadratnim profilom, ki je podprta v krajiščih, nanjo pa deluje pravokotna sila na sredini palice, je podan z enačbo $u = \frac{Fl^3}{3E\pi d^4}$.

    a) Zapiši spremembo upogiba za majhne spremembe sile (F), dolžine palice (l) in prečne dimenzije palice (d).

b) Zapiši enačbo za izračun relativne napake upogiba, če imamo podane merske napake za vse tri količine, naštete v primeru a). [i2,1,2009/2010]

20. Upogib palice, ki jo podpremo pod krajiščema in s silo obremenimo na sredini, podaja enačba $u = \frac{Fl^3}{4Ea^4}$.

    a) Zapiši enačbo za majhno spremembo upogiba, če se malo spremenijo sila F, dolžina l ali stranica kvadratnega preseka palice a (pri tem je ploščina kvadratnega preseka $S = a^2$).

    b) Za koliko % se spremeni upogib, če se prečni presek poveča za 0,5%?

    c) Zapiši še enačbo za računanje relativne napake upogiba, če so znane merske napake sile, dolžine in stranice kvadratnega preseka palice. [i3,1,2009/2010]

21. Upornost žice podaja enačba $R = \zeta l/S$, kjer je $S = \pi r^2$. Zapiši totalni diferencial upornosti kot funcije specifične upornosti, dolžine in polmera žice. Zapiši tudi enačbo za izračun relativne napake upornosti.

    [k3,1,2011/2012]

22. Precesijsko frekvenco vrtavke izračunamo po enačbi: $\omega_p = \frac{mgd}{Mr^2\omega}$.

    a) Zapiši totalni diferencial precesijske frekvence.
    [*Rešitev:* $\mathrm{d}\omega_p/\omega_p = \mathrm{d}m/m + \mathrm{d}g/g + \mathrm{d}d/d - \mathrm{d}M/M - 2\mathrm{d}r/r - \mathrm{d}\omega/\omega$]

    b) Zapiši izraz za izračun relativne napake precesijske frekvence.
    [*Rešitev:* $\sigma_{\omega_p}/\omega_p)^2 = (\sigma_m/m)^2 + (\sigma_g/g)^2 + (\sigma_d/d)^2 + (\sigma_M/M)^2 + (2\sigma_r/r)^2 + (\sigma_\omega/\omega)^2$]

    [i1,3i,2011/2012]

23. Silo med dvema točkastima nabojema podaja enačba $F = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Zapiši enačbo za izračun relativne napake sile, če imamo podane merske napake za e_1, e_2 in r. Za koliko % bi se moral spremeniti naboj e_2, da bi sila pri 1% spremembi razdalje ostala enaka? [i2,1,2011/2012]

24. Hitrost izstrelka lahko določimo z balističnim nihalom. Če je masa izstrelka (m) zanemarljiva v primerjavi z maso nihala (M), lahko hitrost izstrelka (v) kot funkcijo višine (h), do katere nihalo zaniha glede na ravnovesno lego, izrazimo s formulo $v = M\sqrt{2gh}/m$. Zapiši enačbo za izračun relativne napake hitrosti izstrelka. [i3,1b,2011/2012]

25. Pri eksperimentalni vaji silo na telo, ki pospešuje, dobimo tako, da v Newtonovo enačbo $F = ma$ vstavimo pospešek, ki ga izrazimo iz enačbe $s = \frac{1}{2}at^2$. Telesu izmerimo maso, odčitamo prepotovano pot in izmerimo čas, ki ga je telo za to pot potrebovalo. Poišči izraz za relativno napako sile. [k3,1,2012/2013]
    [*Rešitev:* $(\sigma_F/F)^2 = (\sigma_m/m)^2 + (\sigma_s/s)^2 + 4(\sigma_t/t)^2$]

Poglavje 14

Ekstremi

1. Iz bakrene žice navijemo tuljavo s polmerom r in priključimo na vir z gonilno napetostjo U in notranjim uporom R. Pri katerem preseku žice bo navor na tuljavo v magnetnem polju ($M = NISB$) največji, če naj masa bakra ne bo večja od m? Podana je gostota ρ in specifična upornost ζ bakra.
   [*Rešitev:* $S = \sqrt{m\zeta/R\rho}$]
2. Pri kolikšnem preseku bakrene žice bo električna napeljava, po kateri teče ves dan tok I, projektirana najbolj gospodarno? Znani so dolžina napeljave, cena električne energije za kWh, cena za kilogram in specifični upor bakra, pa tudi amortizacijske obresti za nakup žice. Upoštevaj samo amortizacijske obresti in ohmske izgube; drugi stroški so le malo odvisni od preseka žice.
   [*Rešitev:* $S = \sqrt{\frac{\xi I^2 C_{\mathrm{el}}}{\eta \rho_{\mathrm{Cu}} C_{\mathrm{Cu}}}}$]
3. Z višine h nad vodoravno ravnino vržemo kamen pod kotom α z začetno hitrostjo v_0. Pri kolikšnem kotu pade kamen najdlje?
   [*Rešitev:* $\tan\alpha = v_0/\sqrt{v_0^2 + 2gh}$]
4. Poišči ekstrem funkcije $f(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2$ za x in y, ki ležita na krožnici s polmerom r in središčem v izhodišču.
   [*Rešitev:* $x = ar/\sqrt{a^2+b^2}$, $x = br/\sqrt{a^2+b^2}$]
5. Poišči, kje na ravnini $z = ax+by+d$ ima potencialna energija $V(z,y,z) = A/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ekstrem.
   [*Rešitev:* $x = ad/(a^2+b^2+1)$, $y = bd/(a^2+b^2+1)$, $z = d/(a^2+b^2+1)$.]

Poglavje 15

Dvojni in trojni integral

1. Izračunaj $\int_0^b \int_0^d (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2. Izračunaj $\int_0^1 \int_1^2 (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
   [*Rešitev:* 8/3]

3. Izračunaj $\int_0^a \int_0^{kx} xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

4. Izračunaj $\int_1^2 \int_x^{\sqrt{3}x} xy\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
   [*Rešitev:* 15/4]

5. Izračunaj $\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ na liku D, omejen s premicami: $y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=3a$.
   [*Rešitev:* $14a^4$]

6. S transformacijo na polarne koordinate izračunaj $\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad D: 1 \le x^2+y^2 \le \mathrm{e}^2$. [*Rešitev:* 2π]

7. Izračunaj $\iiint_Q (1-x)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ na telesu, ki leži v prvem oktantu in pod ravnino $3x+2y+z=6$.
   [*Rešitev:* 3]

8. Izračunaj maso telesa z gostoto $\rho=z$, ki ga omejujejo ploskve $x=0$, $y=0$, $z=0$ $x+y+z=a$.
   [*Rešitev:* $M=a^4/24$]

9. Izračunaj vztrajnostni moment homogenega rotacijskega stožca za rotacijsko os.
   [*Rešitev:* $I_z=3mR^2/10$]

10. Poišči težišče homogene polkrogle.

11. Izračunaj maso krogle s polmerom R, katere gostota se spreminja kot $\rho(x,y,z)=\rho_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}/R$.
    [*Rešitev:* $3\rho_0 V/4$]

12. Poišči težišče krogelnega izseka z radijem R, ki ga okrog osi z simetrično omejimo s polarnim kotom θ_0.

13. Izračunaj vztrajnostni moment nehomogenega valja z radijem R in višino h, ki se vrti okrog simetrijske osi, njegovo gostoto pa podaja naslednja funkcija: $\rho(x,y)=\rho_0\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}$.
    Nasvet: nalogo reši s prehodom na cilindrične koordinate; volumski element v cilindričnih koordinatah je: $dV=r\,\mathrm{d}r\,d\varphi\,\mathrm{d}z$. [k3,2,2010/2011]

14. Nekemu planetu se gostota spreminja kot $\rho(r) = \rho_0 \frac{R}{r}$. Izračunaj maso in vztrajnostni moment planeta!

[kp,3i,2010/2011] [i1,4,2010/2011]

15. Stožec z višino h in polmerom osnovnice R je iz nehomogene snovi, ki se ji gostota spreminja z višino: $\rho(z) = \rho_0 z$.

    a) Izračunaj maso stožca.

    b) Na kateri višini ima stožec težišče? [i3,4,2010/2011]

16. Izračunaj težišče lika, ki je omejen s koordinatnima osema x in y ($x \geq 0$, $y \geq 0$), premico $y = 3$ in parabolo $y = \frac{1}{2}x^2$. [k3,2,2009/2010]

17. Poišči težišče trikotnika, ki je določen s točkami $(-1,0)\,\mathrm{m}$, $(1,0)\,\mathrm{m}$ in $(0,2)\,\mathrm{m}$ in se mu gostota spreminja linearno vzdolž osi y od $1{,}5\,\mathrm{kg/m^3}$ pri $y = 0$ do $1{,}3\,\mathrm{kg/m^3}$ pri $y = 2\,\mathrm{m}$. [kp,3ii,2009/2010]

18. Kos pločevine, ki ima obliko pravokotnika s stranicama $1{,}5\,\mathrm{dm}$ in $3\,\mathrm{dm}$, je debel $2{,}5\,\mathrm{mm}$. Z uporabo dvojnega integrala poišči njegov vztrajnostni moment okrog osi, ki je pravokotna na ravnino pravokotnika in gre skozi njegovo središče. Gostota pločevine je $7{,}9\,\mathrm{kg/dm^3}$. [i1,4,2009/2010]

19. Tanko kovinsko ploščo omejujejo premice $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$ in $x = 2\,\mathrm{m}$. Debelina plošče je $1\,\mathrm{mm}$.

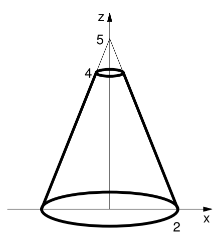
    a) Nariši koordinatni sistem s ploščo, ki jo podaja naloga ter izračunaj x in y koordinato njenega težišča, če je plošča homogena.

    b) Plošči enake oblike in debeline gostota narašča s kvadratom oddaljenosti od osi z, torej jo podaja enačba $\rho(x,y) = a(x^2 + y^2)$. Pri tem je konstanta $a = 2700\,\mathrm{kg/m^5}$. Izračunaj x in y koordinato njenega težišča še v tem primeru. [i2,4,2009/2010]

20. Iz lesene plošče izrežemo lik, ki ga v namišljenem koordinatnem sistemu (v ravnini lesene plošče) omejujejo os x, premica $x = 2$ in kubična parabola $y = x^3$.

    a) Poišči x in y koordinato težišča telesa. [i3,4,2009/2010]

21. Poišči volumen homogenega prisekanega stožca na sliki. Poišči tudi njegovo težišče.



[k3,2,2011/2012]

22. Nehomogenemu kvadru s kvadratno osnovnico $S = 1\,\mathrm{m}^2$ in višino $H = 10\,\mathrm{m}$ se gostota spreminja kot funkcija višine, $\rho(z) = z\rho_0/H$, kjer je $\rho_0 = 2700\,\mathrm{kg/m^3}$.

    a) Poišči maso kvadra. [13500 kg]

    b) Določi težišče kvadra. [$\mathbf{T} = (0'5, 0'5, 6'67)\,\mathrm{m}$]

[i1,3ii,2011/2012]

23. Iz tanke pločevine izrežemo lik, ki leži v prvem kvadrantu in ga omejujeta kubična parabola $y = x^3$ in premica $y = 4x$. Poišči ploščino lika in njegovo težišče. [i2,5,2011/2012] [i3,5,2012/2013]

24. Homogeno telo z gostoto 1 spodaj omejuje ravnina xy, zgoraj pa parabola $z = 2 - x^2$, ki jo zavrtimo okrog osi z. Poišči koordinato težišča, ki leži na osi z, in vztrajnostni moment telesa pri vrtenju telesa okrog te osi.
Nasvet: uporabi cilindrični koordinatni sistem in zapiši, kako se radij plašča telesa spreminja kot funkcija spremenljivke z (ta se spreminja enako, kot $x(z)$ v zgoraj podani paraboli).
[i3,5,2011/2012]

25. Nehomogenemu valju z znanim radijem (R) in višino (h) se gostota spreminja po enačbi $\rho(r) = \frac{R}{r}\rho_0$.

    a) Kolikšna je masa valja? $[m = 2\pi R^2 \rho_0 h]$

    b) Kolikšna pa je masa nastalega telesa, ko iz valja izrežemo stožec, ki ima enako osnovnico in je enako visok kot valj? $[m = \pi R^2 \rho_0 h]$

    c) Pri katerem polmeru je masa valja iz naloge a) znotraj tega polmera enaka polovici celotne mase valja? $[r = R/2]$

    [k3,3,2012/2013]

26. Iz tanke pločevine izrežemo lik, ki ga v koordinatnem sistemu omejujejo premice $y = 2x$, $y = 3x + 1$ in $y = 2$. Nariši lik ter poišči njegovo ploščino in y-koordinato težišča. [i1,3i,2012/2013]

27. V nehomogeni krogli je gostota funkcija radija, $\rho(r) = \frac{r}{R}\rho_0$.

    a) Kolikšna je masa krogle? $[2\pi \rho_0 R^3]$

    b) Kolikšen je vztrajnostni moment krogle? $[\pi \rho_0 R^5]$

    [i2,4,2012/2013]

Poglavje 16

Krivuljni integral

1. Izračunaj električni potencial in električno poljsko jakost, ki jo na osi x povzroča naboj $+e$, enakomerno razmazan v intervalu $-\frac{1}{2}l < x < \frac{1}{2}l$. Preveri, da dobiš pričakovana izraza za $x \gg l$. Pokaži, da je v bližini krajišča ($x \approx 1/2l + \epsilon$), poljska jakost pada obratno sorazmerno z razdaljo od krajišča.
   [*Rešitev:* $U(x) = (e/4\pi\epsilon_0 l) \ln \frac{1+l/2x}{1-l/2x}$, $U(x \gg l) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 x}$, $E_x(x) = e/(x^2 - (l/2)^2)$]

2. Zapiši električni potencial kolobarja z radijema r_1 in r_2, $r_1 > r_2$, na katerem je enakomerno razmazan naboj s ploskovno gostoto σ:

   a) v središču kolobarja,

   b) v geometrijski osi kot funkcijo oddaljenosti od središča, z.

   c) Izračunaj še električno poljsko jakost na osi.

   d) Pokaži, da v veliki oddaljenosti, $z \gg r_1$, dobimo izraz za tožkasti naboj, $U(z) = e/4\pi\varepsilon_0 z$, če je e naboj na kolobarju.

3. Izračunaj potencial in električno poljsko jakost v osi kroga z radijem r, če je naboj $+e$ enakomerno razmazan po polovici oboda. Na skici jasno označi smer električne poljske jakosti.

4. Izračunaj magnetno poljsko jakost v osi krožne zanke. Preveri, da je $\int_{-\infty}^{\infty} H\, dx = I$.
   [*Rešitev:* $H = 1/2Ir^2/(r^2 + z^2)^{3/2}$]

5. Dve vzporedni enaki krožni zanki imata skupno os x.

   a) Kolikšna je magnetna poljska jakost na sredini med zankama? Nariši tudi graf $H(x)$.

   b) Kolikšen je tam d^2H/dx^2?

   c) Kolikšno mora biti razmerje razmika in radija zank, da je ta odvod nič? Nariši tudi graf $H(x)$ za ta primer. [*Rešitev:* $a = 1/2r$]

   d) Pokaži, kako se spremenijo enačbe, če namesto ene zanke vzamemo tuljavo z N ovoji?

6. Tri vzporedne enake krožne zanke z radiji po 10 cm imajo skupno os. Razmik med sosednjima zankama je 10 cm. Po zunanjih dveh zankah tečeta tokova po 1 A v isto smer. Kolikšen tok mora teči v srednji zanki, da bo magnetna poljska jakost na sredini zanke enaka 0? [*Rešitev:* 0,71 A]

7. Izračunaj magnetno poljsko jakost v središču kvadratne tokovne zanke. Kako je magnetna poljska jakost v osi kvadratne tokovne zanke odvisna od razdalje od ravnine zanke?

8. Izračunaj magnetno polje enakomerno nabite krožne plošče z radijem R in površinsko gostoto naboja σ, ki se vrti okoli geometrijske osi s frekvenco ν:

a) v središču plošče, [*Rešitev:* $H = \sigma\pi R\nu = e\nu/R$]

b) v osi plošče, na razdalji z od središča. *Namig:* Krožeči naboj ustvarja tok $I = e\nu$.

[*Rešitev:* $H = \sigma\nu\pi\left((R^2+2z^2)/\sqrt{R^2+z^2} - 2z\right)$]

9. Vodnik, po katerem teče tok I, je napeljan po polovici oboda kroga z radijem r.

   a) Na skici, na kateri je jasno označena smer toka, nariši vektor magnetnega polja v središču kroga in v točki, ki je od središča oddaljena približno za r in leži na osi, ki gre skozi središče kroga in je pravokotna na ravnino, v kateri leži krog. (Nalogo reši brez računanja.)

   b) Kolikšna je magnetna poljska jakost v osi na poljubni oddaljenosti (z) od od središča kroga?

   c) Kolikšen kot tvori vektor magnetnega polja z osjo?

10. Izračunaj magnetno poljsko jakost v osi tuljave tankim navitjem. Na sredini dobiš $H = NI/\sqrt{l^2+(2r)^2}$. Preveri, da je $\int_{-\infty}^{\infty} H\,dx = I$.

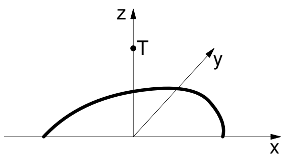
11. Žica s tokom je zvita v dolgo vijačnico. Kolikšna je magnetna gostota v osi?

12. Tanka palica z dolžino l je enakomerno nabita s skupnim nabojem e. Poišči jakost električnega polja na razdalji r_0 od središča palice v smeri pravokotno na os palice. (Velja: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}^3} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$.)

    [k3,3,2010/2011]

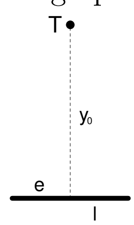
13. Oglišča kvadrata oštevilčimo v nasprotni smeri urinega kazalca. Enakomerno nabita žica z nabojem e poteka od oglišča 1 do oglišča 2. Izračunaj jakost električnega polja v oglišču 3. [i2,4,2010/2011]
    [*Rešitev:* $\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^2}(1 - 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$]

14. Poišči y-komponento magnetnega polja v poljubni točki T na osi polovice krožne zanke, skozi katero teče tok I. Radij krožne zanke je R.



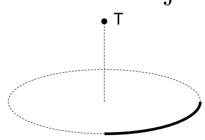
[kp,3i,2010/2011]

15. Poišči jakost električnega polja v točki T, ki leži na razdalji y_0 na simetrali enakomerno



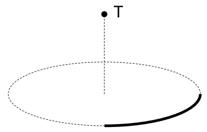
nabitega kosa žice.
Koristni formuli: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$, $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$. [k3,3,2011/2012]

16. Kolikšno je električno polje v osi četrtine enakomerno nabite krožne zanke? Podan je celoten naboj in polmer krožnega loka.



[*Rešitev:* $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e}{2\pi^2\epsilon_0}\frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}(-R, -R, \pi z/2)$] [k3,2,2012/2013]

17. Kolikšna je gostota magnetnega polja v osi četrtine krožne zanke, po kateri teče tok 1 A? Polmer krožnega loka je 1 m.



[i1,3ii,2012/2013]