

6. INTEGRALI

1. Neko vozilo se giblje s konstantno močjo. Zapiši pot kot funkcijo časa, če je bila hitrost telesa ob času $t = 0$ enaka $v_0 = 0$.
[Rešitev: $v = \sqrt{2Pt/m}$, $s = s_0 + \frac{2}{3}\sqrt{2Pt^3/m}$]
2. Deset metrov dolga elastika s prožnostnim modulom 500 N/cm^2 in gostoto $1,5 \text{ g/cm}^3$ je obešena na enem koncu. Za koliko je elastika podaljšana zaradi lastne teže?
[Rešitev: $s = \rho g l^2 / 2E = 15 \text{ cm}$]
3. Kolikšen je upor 10 m dolge bakrene žice, ki je na enem koncu debela 1 mm in se do drugega konca stanjša na $0,6 \text{ mm}$? Radij žice je linearna funkcija vzdolžne koordinate, tako da ima žica obliko prisekanega stožca.
[Rešitev: $R = \zeta l / \pi r_0 r_1$] [KK str. 30, nal. 13]
4. Predstavljajmo si, da bi bila Zemlja prekrita z enakomerno oceansko plastjo z debelino 3000 m . Za koliko bi se ta plast sesedla zaradi stisljivosti v primeru z oceanom, ki bi bil nestisljiv? Stisljivost vode je $50 \cdot 10^{-6} \text{ bar}^{-1}$.
Namig: Velja $\Delta V/V = -\chi \Delta p$. Zapiši, za koliko (ds) bi se stisnila plast vode z debelino dh in površino S na globini h zaradi hidrostaticnega tlaka na tej globini.
[Rešitev: $s = -1/2\chi\rho gh^2$] [KK str. 30, nal. 10]
5. Gumijast trak z dolžino 1 m se enakomerno tanjša od premera 2 cm do premera 1 cm na drugem koncu. Z debelejšim koncem ga pričvrstimo na strop, na tanjši konec pa obesimo kilogramsko utež. Za koliko se trak raztegne? Privzamemo, da je trak veliko lažji od uteži. $E = 10^7 \text{ N/m}^2$.
[Rešitev: $s = mgl/\pi r_0 r_1 E$]
6. Obliko elektrode z zaobljeno konico aproksimiramo z $r = kx^{1/3}$, $0 \leq x < l$, ki se zvezno nadaljuje v valjast odsek z $r = R$, $l \leq x \leq 3l$. Kolikšno je razmerje uporov zaobljenega in valjastega dela elektrode, če napetost priključimo med skrajnji točki elektrode?
7. Pol metra dolga jeklena palica se vrti okrog prečne osi, ki palico razpolavlja, s 300 vrtljaji na minuto. Za koliko se palica raztegne ($E = 220000 \text{ N/mm}^2$, $\rho = 7,8 \text{ kg/dm}^3$)?
[Rešitev: $\Delta x = \frac{\rho \pi^2 v^2 L^3}{6E}$]
8. Po 10 m dolgi cevi z notranjim premerom 1 mm teče zrak s temperaturo 20°C . Tlak na začetku cevi je 500 Pa , na koncu pa 100 Pa . Izračunaj masni pretok.
[Rešitev: $\Phi_m = (\pi r^4 / 8\eta)((p_1 - p_2)/l) 1/2(\rho_1 + \rho_2) = 2 \cdot 10^{-10} \text{ kg/s}$]
9. Po 1 m dolgi cevi s spremenljivim presekom pretakamo olje z viskoznostjo $\eta = 0,1 \text{ Ns/m}^2$. Polmer cevi se linearno spreminja od začetne vrednosti 1 cm do končne vrednosti 2 cm . Kolikšen prostorninski tok teče po cevi, če ga poganja tlačna razlika $\Delta p = 10^4 \text{ N/m}^2$? Za pretakanje po cevi s konstantnim polmerom r in dolžino l velja $\Phi = \pi r^4 \Delta p / 8l\eta$.
10. Valjasto posodo z osnovnico S_v napolnimo s tekočino, ki sega do višine h . V dno posode izvrtamo drobno odprtino s presekom S_o , zaradi česar začne tekočina iztekati. Po kolikšnem času se posoda izprazni? Upoštevaj, da je volumski pretok $\Phi_V = \frac{S_v dh}{dt} = S_o v$ in da hitrost iztekanja tekočine podaja Bernoullijeva enačba $\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho gh$. [kp,1ii,2011/2012]
11. Delavec potiska kvadrasto posodo s konstantno hitrostjo po 20 m dolgem klancu z naklonom 10° . V posodo, ki je na začetku poti prazna, njena masa pa je zanemarljiva, med tem pada dež, zato postaja vse težja. Koliko dela opravi delavec, ko pririne posodo do vrha klanca, če pade v posodo 1 liter dežja na vsak meter poti? Koeficient trenja med posodo in podlago je $0,2$. [k1,2,2011/2012]
[Rešitev: $A = kg(k_{\text{tr}} \cos \varphi + \sin \varphi)d^2/2 = 727 \text{ J}$]
12. Tanka dvometrska deska, ki je široka 20 cm , se vrti s kotno hitrostjo $2\pi \text{ s}^{-1}$ okrog osi, ki gre skozi središče deske vzdolž njene 20-centimetrsk e širine. Kolikšen navor zaradi zračnega upora zaustavlja desko pri tej kotni hitrosti? Upoštevaj, da na desko deluje kvadratni zakon upora, $F_u = \frac{1}{2}c_v \rho v^2 S$, kjer je $c_v = 1$, $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$. [i1,1i,2012/2013]
13. Jez s kvadratnim presekom zapira velika kvadratna loputa z robom 2 m , ki ima os na dnu. Kolikšen navor deluje na loputo, ko je jez poln vode? Hidrostatski tlak podaja enačba: $p(h) = \rho gh$. [i2,2,2012/2013]
[Rešitev: $M = \rho ga^4/6 = 26,16 \text{ kNm}$]

Integracija enačb gibanja: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{v})$

14. Čoln poženemo po mirni vodi z začetno hitrostjo v_0 . Kako se ustavlja, če velja kvadratni zakon upora, $F_u = kv^2$? [Rešitev: $v = v_0/(1 + kv_0t/m)$, $x = (m/k)\ln(1 + kv_0t/m)$]
15. Čolniček poženemo po viskozni tekočini z začetno hitrostjo v_0 . Kako se ustavlja, če velja linearni zakon upora, $F_u = kv$? [Rešitev: $v = v_0e^{-kt/m}$, $x = (mv_0/k)(1 - e^{-kt/m})$]
16. Telo z maso 1 kg poženemo po vodoravni podlagi z začetno hitrostjo 1 m/s. Ustavlja se pod vplivom sile, ki je sorazmerna s korenem iz hitrosti: $F_u = -A\sqrt{v}$, $A = 1 \text{ kgm}^{1/2}\text{s}^{-3/2}$. V kolikšnem času pade hitrost na 0? Kolikšno razdaljo pri tem prepotuje?
17. Kroglico iz jekla z gostoto $7,6 \text{ g/cm}^3$ in radijem $0,4 \text{ cm}$ spustimo v tekočino z viskoznostjo $0,1 \text{ kg/ms}$ in gostoto 1 g/cm^3 .
- a) Zapiši enačbo za gibanje kroglice in izračunaj hitrost, ki jo doseže kroglica po dolgem času. (Upoštevaj linearni zakon upora $F_u = 6\pi r\eta v$.) [Rešitev: $v_0 = 2r^2(\rho - \rho')g/9\eta = 2,30 \text{ m/s}$]
- b) V kolikšnem času doseže 90% končne hitrosti, če je na začetku mirovala? [Rešitev: $\tau = 2r^2\rho/9\eta = 0,270 \text{ s}$, $t = -\tau \ln((v_0 - v)/v_0) = 0,62 \text{ s}$]
- c) Kolikšno pot naredi v tem času? [Rešitev: $s = v_0t - v(t)\tau = 0,875 \text{ m}$]
18. Reši primera a) in b) pri prejšnji nalogi za primer, ko ima kroglica tik pod gladino začetno hitrost, ki je večja od končne (na primer dvakratno končno hitrost).
19. Padalec s padalom tehta 100 kg . Njegova končna hitrost je 5 m/s . Kakšno je gibanje, če je upor sorazmeren s kvadratom hitrosti? Po kolikšnem času doseže padalec 90% končne hitrosti, če na začetku miruje (z odprtim padalom)? *Kolikšno pot naredi v tem času?
[Rešitev: $v = v_\infty(e^{2gt/v_\infty} - 1)/(e^{2gt/v_\infty} + 1) = v_\infty \text{th}(gt/v_\infty)$, $t = 0,74 \text{ s}$,
* $s = (v_\infty^2/g) \ln \text{ch}(gt/v_\infty) = 2,07 \text{ m}$]
20. Pri skoku padalec najprej prosto pada s hitrostjo 20 m/s . Izračunaj, kako se s časom spreminja hitrost padalca od trenutka, ko odpre padalo, če je upor sorazmeren s kvadratom hitrosti? Po kolikšnem času doseže padalec 1,1 končne hitrosti? Končna hitrost padalca je 5 m/s , za težni pospešek vzemi 10 m/s^2 .
[Rešitev: $t = -(v_\infty/2g) \ln \left(\frac{(v-v_\infty)(v_0+v_\infty)}{(v+v_\infty)(v_0-v_\infty)} \right) = 0,63 \text{ s}$, $v_0 = 20 \text{ m/s}$, $v_\infty = 5 \text{ m/s}$, $v = 1,1v_\infty$]
21. Kolesar s skupno maso 80 kg vozi po vodoravni cesti in ko doseže hitrost 24 km/h , preneha poganjati.
- a) V kolikšnem času pade njegova hitrost na polovico začetne, če ga ustavlja le zračni upor (trenja ne upoštevamo)? Kolikšno pot napravi v tem času? Prečni presek kolesarja je $0,5 \text{ m}^2$, koeficient upora $c_u = 1$ in gostota zraka $1,25 \text{ kg/m}^3$. (Upor zraka je $F_u = \frac{1}{2}c_u\rho Sv^2$.)
[Rešitev: $k = c_u S\rho/2m$, $t = (1/v - 1/v_0)/k = 38,4 \text{ s}$, $s = \ln(1 + kv_0t)/k = 177 \text{ m}$]
- b) Za koliko se skrajša čas, če upoštevamo še trenje, $k_{tr} = 0,05$?
[Rešitev: $a_0 = k_{tr}g$, $t = \left(\arctan v_0\sqrt{k/a_0} - \arctan v\sqrt{k/a_0} \right) / \sqrt{ka_0} = 23,5 \text{ s}$, $\Delta t = 14,9 \text{ s}$]
- c) Pri rezultatu ii) razišči obe limiti, ko je ena od zaviralnih sil znatno večja od druge.
22. Vzemimo, da je na neki podlagi sila trenja med telesom in podlago odvisna od hitrosti in jo lahko opišemo z enačbo $F_{tr} = mge^{-v/v_{tr}}$. Pri tem je konstanta v_{tr} enaka 2 m/s .
- a) Kolikšna je hitrost telesa po dveh sekundah, če je bila začetna hitrost 6 m/s ?
- b) Po kolikšnem času se telo ustavi?
- c) Nariši graf odvisnosti hitrosti od časa.
- d) Kolikšno pot opravi telo, preden se ustavi? ($\int \ln x \, dx = x \ln x - x$) [k1,2,2010/2011]
23. Jahač na zračni drži zavira magnetna sila, ki je premo sorazmerna s hitrostjo. Pospešek jahača lahko zapišemo z enačbo $a = -\beta v$.
- a) Poišči enačbo, ki opisuje, kako se hitrost jahača, ki ga poženemo z začetno hitrostjo v_0 , spreminja s časom.
- b) Kako pa je od časa odvisna pot, ki jo opravi jahač?
- c) Zapiši še, kako se spremeni hitrost ob majhnih spremembah časa in začetne hitrosti. [i1,1,2010/2011]

24. Na mirujoče telo z maso 3 kg začne v nekem trenutku delovati sila, ki je obratno sorazmerna s hitrostjo in jo podaja enačba $F = A/v$, $A = 2 \text{ kgm}^2/\text{s}^3$.
- Zapiši, kako se spreminja hitrost telesa v odvisnosti od časa. Kolikšna je hitrost telesa po 10 s?
 - Zapiši še, kakšna je lega telesa v odvisnosti od časa. Kako daleč je telo po 10 s? [i3,2,2010/2011]
25. Na mirujoče telo z maso 3 kg začne v nekem trenutku delovati sila, ki jo podaja enačba $F = A/v^2$, $A = 1 \text{ kgm}^3/\text{s}^4$.
- Zapiši, kako se spreminja hitrost telesa v odvisnosti od časa. Kolikšna je hitrost telesa po 10 s?
 - Zapiši še, kakšna je lega telesa v odvisnosti od časa. Kako daleč je telo po 10 s? [i2,3,2011/2012]

Integracija enačb gibanja: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$

26. Navzdol poveznjeno epruveto, v kateri je nekaj zraka, potopimo v vodo (kartezijski plavač). Če plavač spustimo iz ravnovesne lege, deluje nanj pri dovolj majhnih odmikih x rezultanta sil, ki je sorazmerna z odmikom od ravnovesne lege: $F = kx$ in kaže **v smeri gibanja**. Masa plavača je 10 g, konstanta $k = 5 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$.
- Kolikšno hitrost doseže plavač, ko prepotuje 10 cm, če je bil na začetku v ravnovesni legi in miroval. (Ravnovesje je labilno, zato že poljubno majhen odmik iz ravnovesne lege povzroči gibanje plavača proč od ravnovesne lege.) [Rešitev: $v = 7 \text{ cm/s}$]
 - Koliko časa potrebuje plavač za zadnjo polovico poti? [Rešitev: $t = 1 \text{ s}$]
27. Denimo, da skozi središče Zemlje izvrtamo tunel. Kako bi se gibalo telo v takšnem tunelu, če vemo, da se spreminja težni pospešek linearno z oddaljenostjo od središča Zemlje? V kolikšnem času bi doseglo južno poloblo? Za radij Zemlje vzemi 6400 km.
28. Na mirujoče telo z maso 1 kg prične delovati sila, ki je sorazmerna s koreninom razdalje od začetne lege: $F = A\sqrt{s}$, $A = 3 \text{ N/m}^{1/2}$ in ima konstantno smer. Kolikšno hitrost doseže telo, ko prepotuje razdaljo $s = 1 \text{ m}$? Koliko časa potrebuje za to? [Rešitev: $v = 2\sqrt{A/3m} s^{3/4} = 2 \text{ m/s}$, $t = 2\sqrt{3m/A} s^{1/4} = 2 \text{ s}$]
29. Telo z maso 1 kg se giblje premo po gladki, rahlo valoviti podlagi. V okolici izhodišča se sila na telo spreminja s koordinato x kot $F = bx^2$, pri čemer je $b = 1 \text{ N/m}^2$.
- Kolikšno hitrost doseže pri gibanju v smeri osi x , ko prepotuje razdaljo $s = 20 \text{ cm}$, če na začetku v izhodišču miruje? [Rešitev: $v = \sqrt{2bs^3/3m}$]
 - Koliko časa porabi za zadnjo polovico poti? [Rešitev: $t = \sqrt{6m/b}(\sqrt{2} - 1)$]
30. Na mirujoče telo z maso 1 kg prične delovati sila $F = kx^{2/3}$, $k = 3 \text{ kgm}^{1/3}\text{s}^{-2}$, pri čemer je x razdalja od začetne lege, in ima konstantno smer.
- Kolikšno hitrost doseže telo, ko prepotuje razdaljo $s = 1 \text{ m}$? [Rešitev: $v = \sqrt{6k/5m} s^{5/6} = 1,9 \text{ m/s}$]
 - Koliko časa potrebuje za to? [Rešitev: $t = \sqrt{30m/k} s^{1/6}$]
31. Veliko težji delec privlači lažjega z maso $3 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$ s silo $F = -K e^{-r/a}$, $K = 100 \text{ N}$, $a = 1 \text{ fm}$ ($= 10^{-15} \text{ m}$, 1 femtometer). Lažji na začetku miruje daleč proč od težjega.
- Kolikšno hitrost doseže lažji delec, ko se približa težjemu na razdaljo $r = 1 \text{ fm}$? [Rešitev: $v = \sqrt{2Ka/m} e^{-r/2a}$]
 - Kolikšen čas potrebuje za zadnji femtometer poti? [Rešitev: $t = \sqrt{2am/K}(e^{r/a} - e^{r/2a})$]
32. Verigo dolžine l postavimo na mizo tako, da preko roba mize visi kos verige z dolžino x_0 . Verigo spustimo.
- Kako se spreminja hitrost verige v odvisnosti od njene lege (dolžine dela verige, ki visi preko mize)? [Rešitev: $v(x) = \sqrt{\frac{g}{l}(x^2 - x_0^2)}$]
 - Kako je lega verige (dolžina dela verige, ki visi preko mize) odvisna od časa? [Rešitev: $t(x) = \sqrt{g/l} \ln \left(x/x_0 + \sqrt{(x/x_0)^2 - 1} \right)$, $x(t) = (1 + e^{2\sqrt{g/l}t}) / (\frac{x_0}{2} e^{\sqrt{g/l}t})$]
 - Kakšna pa sta $v(x)$ in $x(t)$, če upoštevamo še trenje?

$$[Rešitev: v(x) = \sqrt{\frac{g}{l} [(1 + k_{tr})(x^2 - x_0^2) + 2k_{tr}l(x - x_0)]},$$

$$x(t) = \frac{lk_{tr}}{1 + k_{tr}} + \left(x_0 - \frac{lk_{tr}}{1 + k_{tr}} \right) \sqrt{1 + \left(e^{\sqrt{g(1+k_{tr})/l}t} - 1 \right)^2}]$$

33. Verigo dolžine l obesimo preko škripca tako, da desno od škripca visi del verige dolžine x_0 , levo od škripca pa del verige dolžine $l - x_0$. Verigo spustimo. Škripec se vrti brez trenja in ima majhen obseg v primerjavi z verigo. Verigo spustimo.

a) Kako se spreminja hitrost verige v odvisnosti od njene lege (dolžine dela verige, ki visi na desni strani škripca)?

b) Kako je lega verige (dolžina dela verige, ki visi na desni strani škripca) odvisna od časa?

34. Asteroid prileti iz zelo velike oddaljenosti ($r \rightarrow \infty$) v naše Osončje in leti naravnost proti Soncu. Zaradi gravitacijske sile Sonca ($F = -\kappa m M / r^2$) mu hitrost ves čas narašča. ($\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$)

a) Kolikšna je hitrost asteroida, ki je v zelo veliki oddaljenosti miroval, ko se približa Soncu na razdaljo, na kakršni kroži okrog njega Zemlja ($1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$)? Masa Sonca je $2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

$$[\text{Rešitev: } v(x) = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = 42 \text{ km/s}]$$

b) Koliko časa potuje asteroid od Zemljinega do Venerinega tira okrog Sonca, če je Venerina oddaljenost od Sonca $3/4$ Zemljine? [k,3,2009/2010]

$$[\text{Rešitev: } v(x) = \frac{2}{3\sqrt{2GM}}(s_2^{3/2} - s_1^{3/2}) = 9,6 \text{ dni}]$$

35. Telo z maso 2 kg miruje v izhodišču. Nanj začne delovati sila, ki ima konstantno smer in jo podaja enačba $F = A\sqrt{x^3}$, pri čemer je konstanta $A = 5 \text{ Nm}^{-3/2}$. Kolikšno hitrost ima telo, ko je od izhodišča oddaljeno $0,5 \text{ m}$? Koliko časa je potrebovalo za to pot? [i2,2,2010/2011]

$$[\text{Rešitev: } v = \sqrt{\frac{4}{5} \frac{A}{m} x^{5/2}} = 0,59 \text{ m/s}, t = 2\sqrt{5m/A} (x_0^{-1/4} + x^{-1/4})]$$

36. Na mirujoče telo z maso 1 kg prične delovati sila $F = kx^{2/3}$, $k = 3 \text{ kgm}^{1/3}\text{s}^{-2}$, pri čemer je x razdalja od začetne lege. Sila ima ves čas konstantno smer vzdolž x .

a) Kolikšno hitrost doseže telo, ko prepotuje razdaljo $s = 1 \text{ m}$?

b) Koliko časa potrebuje za to?

[i3,3,2011/2012]

37. V sredino metrske cevke, ki se s konstantno kotno hitrostjo 20 s^{-1} vrti okrog enega krajišča, prilepimo kamenček.

a) S kolikšno (radialno) hitrostjo izleti kamenček iz cevke, ko lepilo nenadoma popusti? Trenje zane-marimo. [Rešitev: $v = \omega\sqrt{r_2^2 - r_1^2} = 17,3 \text{ m/s}$]

b) Koliko časa potrebuje kamenček za pot od polovice do konca cevke?

$$\text{Koristna formula: } \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C$$

[k1,3,2012/2013]

$$[\text{Rešitev: } t = \omega^{-1} \ln\left(\frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - r_1^2}}{r_1}\right) = 0,031 \text{ s}]$$