Matematične metode v fiziki 1

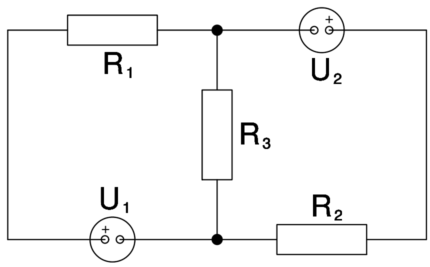
11. REŠEVANJE SISTEMOV ENAČB, ISKANJE INVERZNIH MATRIK, LASTNIH VREDNOSTI, LASTNIH VEKTORJEV

1. Reši sistem enačb za tokove v vezju na spodnji sliki na dva načina:

   a) z Gaussovo eliminacijo za enačbo $\underline{\mathbf{R}}\,\mathbf{I} = \mathbf{U}$

   b) z določitvijo inverzne matrike v enačbi $\mathbf{I} = \underline{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{U}$

   Vrednosti izvirov napetisto in uporov so naslednje: $U_1 = 5\,\mathrm{V}$, $U_2 = 10\,\mathrm{V}$, $R_1 = 15\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $R_3 = 25\,\Omega$.



   [*Rešitev:* $\mathbf{I} = \frac{1}{47}\begin{bmatrix} 19 \\ 21 \\ 2 \end{bmatrix}$ A]

2. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje za matriki

   a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

   [*Rešitev:* a) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 1, \mathbf{l_1} = (1,\ -5,\ -13'5), \mathbf{l_2} = (0,1,2), \mathbf{l_3} = (0,0,1)$
   b) $\lambda_1 = 3, \lambda_{2,3} = -1, \mathbf{l_1} = (2,1,2), \mathbf{l_{2,3}} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -0'5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$ npr. $\mathbf{l_2} = (-1,0,1), \mathbf{l_3} = (-0'5,1,0)$]

3. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

   $$\begin{bmatrix} 1 & h & 0 \\ h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

   [*Rešitev:* $\lambda_1 = k, \lambda_2 = 1-h, \lambda_3 = 1+h, \mathbf{l_1} = (0,0,1), \mathbf{l_2} = (-1,1,0), \mathbf{l_3} = (1,1,0)$]

4. Podana je matrika $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ in vektor $\mathbf{x} = (1, -2, 1)$.

   a) Poišči vektor $\mathbf{y} = \mathrm{A}\mathbf{x}$. [*Rešitev:* $\mathbf{y} = (1,\ -5, 15)$]

   b) Za kolikokrat matrika A podaljša ali skrajša vektor $\mathbf{x}$? [*Rešitev:* $y/x = 6{,}5$]

   c) Za kolikšen kot zavrti matrika A vektor $\mathbf{x}$? [*Rešitev:* $\varphi = 47{,}9°$]

   d) Ali je vektor $\mathbf{v} = (1,1,0)$ lastni vektor matrike A? Odgovor utemelji! [*Rešitev:* da]

   [k2,2,2009/2010]

5. Reši naslednji sistem enačb z metodo Gaussove eliminacije:

   $$\begin{aligned} 5x + 3y - 3z &= -1 \\ 3x + 2y - 2z &= -1 \\ 2x - 1y + 2z &= 8 \end{aligned}$$

   [*Rešitev:* $x = 1, y = 2, z = 4$] [kp,2ii,2009/2010]

6. Preveri, ali je vektor $\mathbf{x} = (-2, 4, 1)$ lastni vektor matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Če je, poišči tudi pripadajočo lastno vrednost. [i1,2,2009/2010]
[*Rešitev:* da, $\lambda = -5$]

7. Z Gaussovo eliminacijsko metodo reši naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} -x + y + 2z &= 2 \\ 3x - y + z &= 6 \\ -x + 3y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

[*Rešitev:* $x = 1, y = -1, z = 2$] [i3,2,2009/2010]

8. Podana je normala na ploskev $\mathbf{S} = (2, 4, -1)\,\mathrm{m}^2$ in napetostni tenzor

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ \mathrm{N/m}^2.$$

a) Izračunaj silo na podano ploskev; silo na ploskev izračunamo po enačbi $\mathbf{F} = \underline{\sigma}\mathbf{S}$.
[*Rešitev:* $\mathbf{F} = (20, 16, -1)\,\mathrm{N}$]

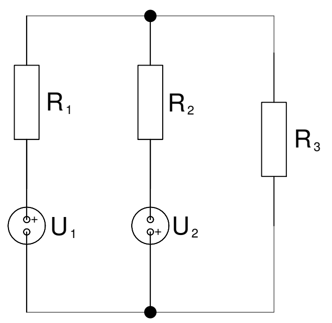
b) Poišči smerni vektor (tj. enotski vektor) normale na ploskev in enotski vektor sile.
[*Rešitev:* $\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2, 4, -1), \hat{\mathbf{F}} = \frac{1}{\sqrt{657}}(20, 16, -1)$]

c) Z rezultatoma iz točke b) izračunaj kot, ki ga oklepa sila z vektorjem normale na površino!
[*Rešitev:* $\varphi = 26{,}6°$]

d) Preveri, če je vektor $\mathbf{x} = (1, 1, 0)$ lastni vektor napetostnega tenzorja $\underline{\sigma}$. Če je, poišči tudi pripadajočo lastno vrednost. (Vprašanje ni povezano s prejšnjimi tremi podtočkami.) [*Rešitev:* da, $\lambda = 6$]
[i3,3,2009/2010]

9. V nekem koordinatnem sistemu je tenzor vztrajnostnega momenta za neko telo enak $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Poišči vztrajnostne momente tega telesa v lastnem koordinatnem sistemu tenzorja vztrajnostnega momenta (t.j. poišči lastne vrednosti). Poišči tudi prehodno matriko (t.j. lastne vektorje).
[*Rešitev:* $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 5, \mathbf{l_1} = (-2, 2, 1), \mathbf{l_2} = (-0, -1, 2), \mathbf{l_3} = (5, 4, 2)$] [k2,2,2010/2011]

10. Z metodo Gaussove eliminacije poišči tokove, ki tečejo skozi upore R_1, R_2 in R_3. Vrednosti upornikov so $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$ in $R_3 = 1\,\Omega$, vrednosti napajalnih napetosti pa $U_1 = 6\,\mathrm{V}$ in $U_2 = 2\,\mathrm{V}$.



[kp,2ii,2010/2011][i1,3,2010/2011][i1,2ii,2012/2013]

11. Podan je tenzor vztrajnostnega momenta za neko telo:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\ \mathrm{kgm}^2$$

a) Kolikšen je kot med osjo vrtenja, ki jo podaja vektor $\boldsymbol{\omega} = (0, 1, 1)\,\mathrm{s}^{-1}$, in vrtilno količino?

b) Ali na os deluje kakšen navor, če vrtimo telo okrog osi $\boldsymbol{\omega} = (-2, 1, 0)\,\mathrm{s}^{-1}$ Odgovor utemelji!

c) Poišči osi, okrog katerih bi morali vrteti telo, da nanje pri vrtenju ne bi deloval navor.

[i1,2,2010/2011]

12. Podan je vektor $\mathbf{x} = (0, 1,\ -1)$ in matrika:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Kolikokrat daljši (ali krajši) je vektor, ki ga dobimo, če z matriko A delujemo na vektor $\mathbf{x}$? [*Rešitev:* $3/\sqrt{2}\times = 2{,}12\times$]

b) Za kolikšen kot je matrika A zasukala vektor x? [*Rešitev:* $\varphi = 90°$]

c) Koliko znaša pravokotna projekcija zasukanega vektorja na vektor $\mathbf{x}$? [*Rešitev:* $\mathbf{proj_y x} = 0$]

d) Ali je vektor $\mathbf{p} = (-1, 1, 0)$ lastni vektor matrike A? [*Rešitev:* da, $\lambda = -1$]

[i2,3,2010/2011] [i3,4,2012/2013]

13. Podana sta vektorja $\mathbf{a} = (-2, 3, 12)$ in $\mathbf{b} = (6,\ -7,\ -6)$, ki vodita od izhodišča do točk A in B.

a) Kako oddaljena je točka A od točke B?

b) Kolikšen je kot med vektorjema?

c) Kolikšna je ploščina trikotnika, ki ga razpenjata vektorja?

d) Ali je kateri izmed vektorjev lastni vektor matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 12 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}?$$

[i3,3,2010/2011]

14. Tenzor vztrajnostnega momenta za neko telo je v danem koordinatnem sistemu enak

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathrm{kgm}^2.$$

Poišči vztrajnostne momente telesa pri vrtenju okrog osi lastnega koordinatnega sistema (t.j. lastne vrednosti) in kam te osi v prvotnem koordinatnem sistemu kažejo (t.j. lastne vektorje). [k2,3,2011/2012]
[*Rešitev:* $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5, \mathbf{l_1} = (2, -1, 0), \mathbf{l_2} = (0, 0, 1), \mathbf{l_3} = (1, 2, 0)$]

15. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}464 & -3 \\ 0 & 3 & 3{,}464 \end{bmatrix}.$$

Z matriko delujemo na vektor $\mathbf{x} = (0,\ 1,\ 0)$.

a) Za kolikšen kot in okrog katere osi zavrti matrika A vektor $\mathbf{x}$? [*Rešitev:* za $41°$ okrog osi x]

b) Za kolikokrat matrika vektor podaljša? [*Rešitev:* 4,6×]

c) Poišči vsaj en lastni vektor matrike A. [*Rešitev:* $\lambda_1 = 4, \mathbf{l_1} = (1, 0, 0)$]

[k2,2,2012/2013]

16. Dana je matrika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ in vektor $\mathbf{x} = (1,\ 2,\ 3)$.

a) Ali je vektor $\mathbf{x}$ pravokoten na vektor $\mathbf{a} = (1,\ 1,\ -1)$?

b) Ali je vektor $\mathbf{x}$ lastni vektor matrike A?

c) Za kolikšen kot zavrti matrika A vektor $\mathbf{x}$?

d) Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{x}$ na vektor $\mathbf{b} = (1,\ 1,\ 1)$. Velja $\mathbf{proj_a b} = \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}}{a^2}$.

[i1,2i,2012/2013]