

12. TENZORJI: UPORABA IN TRANSFORMACIJE – FIZIKALNI ZGLEDI

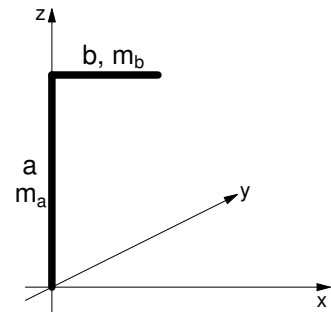
Tenzor vztrajnostnega momenta

1. Pokaži, kako se transformira tenzor iz enega v drug koordinatni sistem. Pokaži uporabo transformacije tenzorja pri računanju vrtilne količine kvadra, ki ga vrtimo okrog poljubne (ne simetrijske) osi. Pri tem je:

$$J_{\text{kvadra}} = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}.$$

2. Zapiši tenzor vztrajnostnega momenta za telo, ki je sestavljeno iz dveh kosov žice, kot je prikazano na sliki. Dolžini palic sta $a = 2\text{ m}$ in $b = 1\text{ m}$, masi pa $m_a = 2\text{ kg}$ in $m_b = 1\text{ kg}$. Poišči smeri osi, okrog katerih lahko telo vrtimo, ne da bi to povzročalo navor v ležaju. Tenzor vztrajnostnega momenta bo tedaj diagonalen – vsi izvendiagonalni elementi, ki predstavljajo deviacijske momente, bodo enaki nič. Poišči tudi vztrajnostne momente (t.j. lastne vrednosti oz. diagonalne elemente tenzorja vztrajnostnega momenta v njegovem lastnem sistemu).

$$J_{\text{spl.}} = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xy dm & -\int xz dm \\ -\int yx dm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yz dm \\ -\int zx dm & -\int zy dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}$$

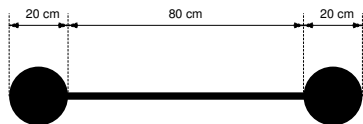


3. Izračunaj tenzor vztrajnostnega momenta za palico v koordinatnem sistemu, v katerem palica tvori z osjo x kot 30° . Računaj na dva načina:
 - a) direktno in
 - b) v koordinatnem sistemu, v katerem je palica vzporedna z osjo x , ki ga nato zasučeš za podani kot.
4. Izračunaj tenzor vztrajnostnega momenta telesa v obliki črke L, pri čemer sta dolžini krakov 40 cm in 20 cm , njuni masi pa $0,40\text{ kg}$ in $0,20\text{ kg}$. Tenzor zapiši v težiščnem sistemu (najprej poišči, kje je težišče, nato pa vanj postavi izhodišče koordinatnega sistema).
5. Telo je sestavljeno iz dveh enakih krogel, ki se dotikata. Radij vsake krogle je 10 cm in masa 3 kg . Telo se vrti s kotno hitrostjo $\omega = 10\text{ s}^{-1}$ okoli osi, ki gre skozi težišče sistema in tvori z zveznico središče krogel kot 60° .
 - a) Kolikšen kot tvori vrtilna količina z osjo vrtenja? [Rešitev: $20,6^\circ$]
 - b) Kolikšen je vztrajnostni moment telesa okoli osi vrtenja? [Rešitev: $23mr^2/10 = 0,069\text{ kgm}^2$]
6. Enak problem kot zgoraj: Homogena lesena krogla z radijem $R = 20\text{ cm}$ in maso $M = 20\text{ kg}$, je prebodena z jekleno palico z dolžino $l = 4R$ in maso $m = 1\text{ kg}$, tako da središči krogle in palice sovpadata. Telo se vrti s kotno hitrostjo $\omega = 10\text{ s}^{-1}$ okoli osi, ki tvori s palico kot 60° . Zapiši tenzor vztrajnostnega momenta za telo na spodnji sliki. Poišči smeri, okrog katerih lahko vrtimo telo, ne da bi to povzročalo navor na ležaj. Poišči vztrajnostne momente, če telo vrtimo okrog iskanih treh osi.
7. Zapiši tenzor vztrajnostnega momenta za sistem točkastih mas, ki ga vrtimo okrog koordinatnega izhodišča. Poišči vztrajnostne momente v koordinatnem sistemu (t.j. lastne vrednosti tenzorja), v katerem sistem nima deviacijskih momentov in zapiši še vektorje pripadajočih osi vrtenja (t.j. lastne vektorje).

- 1. masa: $m_1 = 3$, $\mathbf{r}_1 = (1, 0, 1)$
- 2. masa: $m_2 = 4$, $\mathbf{r}_2 = (1, 1, -1)$
- 3. masa: $m_3 = 2$, $\mathbf{r}_3 = (-1, 1, 0)$

8. Dve krogli s premerom 0,2 m in maso 1 kg sta povezani s tanko 80 cm palico, ki ima maso 0,5 kg.

- Zapiši tenzor vztrajnostnega momenta za opisani sistem krogel in palice za vrtenje okrog težišča v lastnem sistemu.
- Zapiši še tenzor vztrajnostnega momenta za vrtenje opisanega sistema okrog osi, ki je za 30° nagnjena glede na palico.



[k2,3,2010/2011]

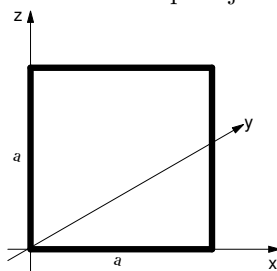
9. Podan je tenzor vztrajnostnega momenta za neko telo:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ kgm}^2$$

- Kolikšen je kot med osjo vrtenja, ki jo podaja vektor $\boldsymbol{\omega} = (0, 1, 1) \text{ s}^{-1}$, in vrtilno količino?
- Ali na os deluje kakšen navor, če vrtimo telo okrog osi $\boldsymbol{\omega} = (-2, 1, 0) \text{ s}^{-1}$. Odgovor utemelji!
- Poišči osi, okrog katerih bi morali vrteti telo, da nanje pri vrtenju ne bi deloval navor.

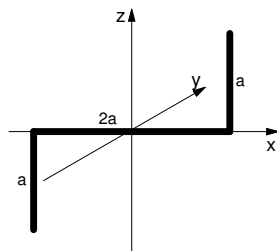
[i1,2,2010/2011]

10. Zapiši tenzor vztrajnostnega momenta za žičnat okvir na spodnji sliki. Masa žice z dolžino a je m .



[i2,3,2010/2011]

11. Zapiši tenzor vztrajnostnega momenta za kos dvakrat upognjene žice na sliki. Pri tem je $a = 1 \text{ dm}$, masa žice z dolžino a pa 1 kg.



[i2,4,2011/2012]

12. Telo je sestavljeno iz dveh enakih krogel, ki se dotikata. Radij vsake krogel je 10 cm in masa 3 kg. Telo se vrti s kotno hitrostjo 10 s^{-1} okoli osi, ki gre skozi težišče sistema in tvori z zveznico skozi središče krogel kot 60° .

- Poišči vztrajnostni moment nastalega zlepka pri vrtenju okrog vseh treh osi lastnega koordinatnega sistema in zapiši tenzor vztrajnostnega momenta.

$$[J_{xx} = \frac{4}{5}mr^2 = 0,024 \text{ kgm}^2, J_{yy} = J_{zz} = \frac{14}{5}mr^2 = 0,084 \text{ kgm}^2]$$

- Kolikšen kot tvori vrtilna količina z osjo vrtenja?

$$[\boldsymbol{\omega} = \omega(\cos \varphi, 0, \sin \varphi) = (5, 0, 8,7) \text{ s}^{-1},$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} = (0,12, 0, 0,73) \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}, \vartheta = 20^\circ]$$

Koristna formula: $J_{\text{krogel}} = \frac{2}{5}mr^2$

[i2,3,2012/2013]

Ostali fizikalni zgledi

13. Na kovinski plošči, ki ima temperaturo 100°C , leži 5 cm debela lesena deska, ki je rezana pod kotom $\varphi = 30^\circ$ glede na lesna vlakna. Na zgornjo ploskev deske je pritisnjena 5 mm debela plast ledu. V kolikšnem času se stali ves led? Toplotna prevodnost lesa vzdolž vlaken je $\lambda_{\parallel} = 0,35 \text{ W/mK}$, prečno na vlakna pa $\lambda_{\perp} = 0,14 \text{ W/mK}$. Poišči najprej toplotni tok, ki teče skozi desko s površino S . Zapiši tenzor toplotne prevodnosti v njegovem lastnem sistemu. Nalogo reši na dva načina:
 - a) v lastnem sistemu tenzorja toplotne prevodnosti in
 - b) v lastnem sistemu deske.
14. Neka anizotropna snov ima glavne dielektričnosti $\epsilon_1 = 1,5$, $\epsilon_2 = 2,5$ in $\epsilon_3 = 3$. V snovi ustvarimo takšno električno polje, da oklepa $\mathbf{E}$ enake kote z vsemi tremi glavnimi smermi. Kolikšen kot oklepata vektorja $\mathbf{E}$ in $\mathbf{D}$?
15. Na koncu 1 mm debele žice visi utež z maso 10 kg. Zapiši tlačni tenzor v žici! Kolikšna je strižna napetost v ravnini, ki je k osi žice nagnjena za 45° ? [KK str. 91, nal. 2]
16. Gumijasta opna z debelino 1 mm je v svoji ravnini izotropno raztegnjena z napetostjo $\gamma = 1 \text{ N/m}$. Kakšen je tlačni tenzor v opni? Kolikšna je strižna napetost v ravnini, ki je nagnjena za 45° k normali na opno? [KK str. 92, nal. 3]
17. Kalcit kristalizira v romboedrih (enakorobih paralelipipedih). V smeri trištevne osi (po krajši telesni diagonali) ima tak kristal dielektričnost 7,56, v pravokotnih smereh pa 8,49. Kako stoji vektor $\mathbf{D}$, kadar je jakost polja nagnjena za 45° k trištevni osi? [KK str. 92, nal. 4]
18. Prostor med dvema razsežnima vzporednima elektrodama v razmiku 1 cm je izpolnjen z anizotropno snovjo, katere lastne vrednosti specifičnega upora so 15, 10 in $10 \Omega\text{m}$. Lastni vektor, ki pripada prvi lastni vrednosti, je nagnjen za 45° k normali na elektrodo. Kolikšen tok na cm^2 teče med elektrodama pri napetosti 100 V? [KK str. 92, nal. 5]
19. Kako zapišemo kapaciteto ploščatega kondenzatorja, če je prostor med elektrodama napolnjen z anizotropno snovjo in noben od lastnih vektorjev dielektričnega tenzorja ne kaže pravokotno na plošči? [KK str. 92, nal. 6]
20. Gostoto toplotnega toka skozi snov opisuje enačba $\mathbf{j} = -\underline{\lambda} \mathbf{grad} T$, kjer je $\underline{\lambda}$ tenzor toplotne prevodnosti, $\mathbf{grad} T$ pa gradient temperature. Poišči, kolikšen je kot med smerjo gostote toplotnega toka in gradientom temperature, če je

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} 120 & 50 & 30 \\ 50 & 60 & 40 \\ 30 & 40 & 60 \end{bmatrix} \text{ W/mK} \quad \text{in} \quad \mathbf{grad} T = (20, 5, 5) \text{ K/m}.$$

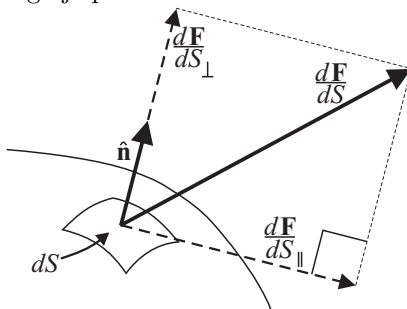
Z uporabo enačbe $P = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S}$ izračunaj še, kolikšen toplotni tok teče skozi ploskev $\mathbf{S} = (72, 64, 64) \text{ cm}^2$.

[i1,3,2009/2010]

21. Napetost v homogeni izotropni snovi opišemo v kartezičnem koordinatnem sistemu x, y, z z napetostnim tenzorjem

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix},$$

kjer so vrednosti v matriki po velikosti $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$. Poljubno ploskev $d\mathbf{S}$ v snovi opišemo z velikostjo dS in s smerjo pravokotnice, ki jo opisuje enotski vektor $\hat{\mathbf{n}}$ s komponentami $\hat{\mathbf{n}} = (n_1, n_2, n_3)$, $d\mathbf{S} = dS\hat{\mathbf{n}}$. Silo na poljubno ploskev izračunamo kot produkt napetostnega tenzorja in ploskve $d\mathbf{F} = \underline{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$. Silo $d\mathbf{F}$ oziroma gostoto sile $d\mathbf{F}/dS$ lahko razstavimo na pravokotno $(\frac{d\mathbf{F}}{dS})_{\perp}$ in tangencialno $(\frac{d\mathbf{F}}{dS})_{\parallel}$ komponento, prva je vzporedna vektorju $\hat{\mathbf{n}}$, druga je pravokotna na vektor $\hat{\mathbf{n}}$.



- a) Za poljubno ploskev dS z normalo $\hat{\mathbf{n}}$ izrazi s $\underline{\sigma}$ in $\hat{\mathbf{n}}$ pravokotno $\left(\frac{d\mathbf{F}}{dS}\right)_{\perp}$ in tangencialno $\left(\frac{d\mathbf{F}}{dS}\right)_{\parallel}$ komponento gostote sile $\frac{d\mathbf{F}}{dS}$.
- b) Poišči smerni vektor $\hat{\mathbf{n}}$ ploskve, na kateri je pravokotna komponenta gostote sile $\left(\frac{d\mathbf{F}}{dS}\right)_{\perp}$ največja.

[k3,3,2009/2010]