

15. DVOJNI IN TROJNI INTEGRAL

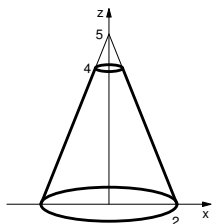
1. Izračunaj  $\int_0^b \int_0^d (x+y) dx dy$ .
2. Izračunaj  $\int_0^1 \int_1^2 (x^2 + y^2) dx dy$ .  
[Rešitev:  $8/3$ ]
3. Izračunaj  $\int_0^a \int_0^{kx} xy^2 dx dy$ .
4. Izračunaj  $\int_1^2 \int_x^{\sqrt{3}x} xy dx dy$ .  
[Rešitev:  $15/4$ ]
5. Izračunaj  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$  na liku  $D$ , omejen s premicami:  $y = x$ ,  $y = x + a$ ,  $y = a$ ,  $y = 3a$ .  
[Rešitev:  $14a^4$ ]
6. S transformacijo na polarne koordinate izračunaj  $\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} dx dy$ ,  $D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2$ . [Rešitev:  $2\pi$ ]
7. Izračunaj  $\iiint_Q (1-x) dx dy dz$  na telesu, ki leži v prvem oktantu in pod ravnino  $3x + 2y + z = 6$ .  
[Rešitev: 3]
8. Izračunaj maso telesa z gostoto  $\rho = z$ , ki ga omejujejo ploskve  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  in  $x + y + z = a$ .  
[Rešitev:  $M = a^4/24$ ]
9. Izračunaj vztrajnostni moment homogenega rotacijskega stožca za rotacijsko os.  
[Rešitev:  $I_z = 3mR^2/10$ ]
10. Poišči težišče homogene polkrogle.
11. Izračunaj maso krogle s polmerom  $R$ , katere gostota se spreminja kot  $\rho(x,y,z) = \rho_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}/R$ .  
[Rešitev:  $3\rho_0 V/4$ ]
12. Poišči težišče krogelnega izseka z radijem  $R$ , ki ga okrog osi  $z$  simetrično omejimo s polarnim kotom  $\theta_0$ .
13. Izračunaj vztrajnostni moment nehomogenega valja z radijem  $R$  in višino  $h$ , ki se vrti okrog simetrijske osi, njegovo gostoto pa podaja naslednja funkcija:  $\rho(x,y) = \rho_0 \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}$ .  
*Nasvet: nalogo reši s preходом na cilindrične koordinate; volumski element v cilindričnih koordinatah je:  $dV = r dr d\varphi dz$ .* [k3,2,2010/2011]
14. Nekemu planetu se gostota spreminja kot  $\rho(r) = \rho_0 \frac{R}{r}$ . Izračunaj maso in vztrajnostni moment planeta!  
[kp,3i,2010/2011] [i1,4,2010/2011]
15. Stožec z višino  $h$  in polmerom osnovnice  $R$  je iz nehomogene snovi, ki se ji gostota spreminja z višino:  $\rho(z) = \rho_0 z$ .  
a) Izračunaj maso stožca.  
b) Na kateri višini ima stožec težišče? [i3,4,2010/2011]
16. Izračunaj težišče lika, ki je omejen s koordinatnima osema  $x$  in  $y$  ( $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ), premico  $y = 3$  in parabolo  $y = \frac{1}{2}x^2$ . [k3,2,2009/2010]
17. Poišči težišče trikotnika, ki je določen s točkami  $(-1,0)$  m,  $(1,0)$  m in  $(0,2)$  m in se mu gostota spreminja linearno vzdolž osi  $y$  od  $1,5 \text{ kg/m}^3$  pri  $y = 0$  do  $1,3 \text{ kg/m}^3$  pri  $y = 2$  m. [kp,3ii,2009/2010]
18. Kos pločevine, ki ima obliko pravokotnika s stranicama  $1,5 \text{ dm}$  in  $3 \text{ dm}$ , je debel  $2,5 \text{ mm}$ . Z uporabo dvojnega integrala poišči njegov vztrajnostni moment okrog osi, ki je pravokotna na ravnino pravokotnika in gre skozi njegovo središče. Gostota pločevine je  $7,9 \text{ kg/dm}^3$ . [i1,4,2009/2010]
19. Tanko kovinsko ploščo omejujejo premice  $y = \frac{1}{2}x$ ,  $y = 2x$  in  $x = 2$  m. Debelina plošče je  $1 \text{ mm}$ .  
a) Nariši koordinatni sistem s ploščo, ki jo podaja naloga ter izračunaj  $x$  in  $y$  koordinato njenega težišča, če je plošča homogena.  
b) Plošči enake oblike in debeline gostota narašča s kvadratom oddaljenosti od osi  $z$ , torej jo podaja enačba  $\rho(x,y) = a(x^2 + y^2)$ . Pri tem je konstanta  $a = 2700 \text{ kg/m}^5$ . Izračunaj  $x$  in  $y$  koordinato njenega težišča še v tem primeru. [i2,4,2009/2010]

20. Iz lesene plošče izrežemo lik, ki ga v namišljenem koordinatnem sistemu (v ravnini lesene plošče) omejujejo os  $x$ , premica  $x = 2$  in kubična parabola  $y = x^3$ .

a) Poišči  $x$  in  $y$  koordinato težišča telesa.

[i3,4,2009/2010]

21. Poišči volumen homogenega priskekanega stožca na sliki. Poišči tudi njegovo težišče.



[k3,2,2011/2012]

22. Nehomogenemu kvadru s kvadratno osnovnico  $S = 1 \text{ m}^2$  in višino  $H = 10 \text{ m}$  se gostota spreminja kot funkcija višine,  $\rho(z) = z\rho_0/H$ , kjer je  $\rho_0 = 2700 \text{ kg/m}^3$ .

a) Poišči maso kvadra.

[13500 kg]

b) Določi težišče kvadra.

[ $\mathbf{T} = (0'5, 0'5, 6'67) \text{ m}$ ]

[i1,3ii,2011/2012]

23. Iz tanke pločevine izrežemo lik, ki leži v prvem kvadrantu in ga omeujeta kubična parabola  $y = x^3$  in premica  $y = 4x$ . Poišči ploščino lika in njegovo težišče.

[i2,5,2011/2012] [i3,5,2012/2013]

24. Homogeno telo z gostoto 1 spodaj omejuje ravnina  $xy$ , zgoraj pa parabola  $z = 2 - x^2$ , ki jo zavrtimo okrog osi  $z$ . Poišči koordinato težišča, ki leži na osi  $z$ , in vztrajnostni moment telesa pri vrtenju telesa okrog te osi.

*Nasvet: uporabi cilindrični koordinatni sistem in zapiši, kako se radij plašča telesa spreminja kot funkcija spremenljivke  $z$  (ta se spreminja enako, kot  $x(z)$  v zgoraj podani paraboli).*

[i3,5,2011/2012]

25. Nehomogenemu valju z znanim radijem ( $R$ ) in višino ( $h$ ) se gostota spreminja po enačbi  $\rho(r) = \frac{R}{r}\rho_0$ .

a) Kolikšna je masa valja?

[ $m = 2\pi R^2 \rho_0 h$ ]

b) Kolikšna pa je masa nastalega telesa, ko iz valja izrežemo stožec, ki ima enako osnovnico in je enako visok kot valj?

[ $m = \pi R^2 \rho_0 h$ ]

c) Pri katerem polmeru je masa valja iz naloge a) znotraj tega polmera enaka polovici celotne mase valja?

[ $r = R/2$ ]

[k3,3,2012/2013]

26. Iz tanke pločevine izrežemo lik, ki ga v koordinatnem sistemu omejujejo premice  $y = 2x$ ,  $y = 3x + 1$  in  $y = 2$ . Nariši lik ter poišči njegovo ploščino in  $y$ -koordinato težišča.

[i1,3i,2012/2013]

27. V nehomogeni krogli je gostota funkcija radija,  $\rho(r) = \frac{r}{R}\rho_0$ .

a) Kolikšna je masa krogle?

[ $2\pi\rho_0 R^3$ ]

b) Kolikšen je vztrajnostni moment krogle?

[ $\pi\rho_0 R^5$ ]

[i2,4,2012/2013]