

Osnove merjenj

B. Golli, PeF

22. oktober 2009

Kazalo

1	Napake izmerjenih količin	2
1.1	Zapis fizikalnih količin	2
1.2	Določitev napake izmerka	3
1.3	Računanje s količinami, obremenjenimi z napako	5
2	Grafi	8
2.1	Linearna odvisnost	9
2.2	Nelinearne odvisnosti	12

1 Napake izmerjenih količin

1.1 Zapis fizikalnih količin

Sistematske in statistične napake. Fizikalne količine dobimo z merjenjem. Količin ne moremo poljubno natančno meriti, zato pri izmerjeni količini podamo negotovost ali napako, s katero je količina izmerjena. Ločimo:

- **sistematske napake**, ki so posledica nenatačnosti same merilne naprave (pri boljših napravah je napaka podana; v večini primerov je večja od najmanjšega razdelka, ki ga lahko še odčitamo) ter
- **slučajne napake**, ki so posledica negotovosti merilnih pogojev: zamik pri začetku ali koncu merjenja s štoparico, merilni trak ni vedno enako napet, zunanji pogoji (temperatura, tlak) niso ves čas enaki ...

Kako podamo negotovost? Izmerjeno količino moramo zapisati tako, da bo iz zapisa razvidna njena negotovost (napaka). To dosežemo tako, da poleg količine navedemo še njeno napako, npr. $g = 9,7 \text{ m/s}^2 \pm 0,2 \text{ m/s}^2$. Količino zapišemo s toliko števki (ciframi), da je zadnja zapisana števka že negotova. To velja tudi tedaj, ko napake eksplicitno ne navedemo; v takšnem primeru velja, da je nenatačnost (napaka) manjša od največjega možnega odstopanja zadnjega mesta; če bi zapisali le $g = 9,7 \text{ m/s}^2$, bi to pomenilo, da je napaka manjša od $0,5 \text{ m/s}^2$.

Pomembne števke. Pri tem imamo v mislih število pomembnih (signifikantnih) števk; nepomembne števke so tiste, ki določajo decimalno mesto. Če bi zgornji rezultat zapisali z drugimi enotami, npr.: $g = 9700 \text{ mm/s}^2$, bi obe ničli predstavljali nepomembni števki, podobno bi to bile tri ničle pri zapisu $g = 0,0097 \text{ km/s}^2$. Pomembni števki sta le 9 in 7. V vseh zapisih je torej *število pomembnih števk enako*.

Vloga ničel v zapisu fizikalne količine. Na podlagi zgornjega zgleda pravzaprav ne smemo zaključiti, da je 0 na koncu števila vedno le nepomembna števka. Če je rezultat naše meritve bolj natančen, recimo $c = 340 \text{ m/s} \pm 3 \text{ m/s}$, nam zadnja ničla tudi predstavlja pomembno števko. V tem primeru iz samega zapisa 340 m/s ne bi mogli ugotoviti, koliko pomembni števki je v rezultatu. Takšni obliki zapisa se zato raje izognemo in uporabimo zapis z desetiškim eksponentom: $c = 3,40 \cdot 10^2 \text{ m/s}$.

Decimalna mesta. Števk ne smemo zamenjevati z decimalnimi mesti; zapis 9,81 vsebuje tri števke in dve decimalni mesti, zapis 0,049 pa tri decimalna mesta in

štiri številke. Ena in isto fizikalno količino lahko zapišemo z različnim številom decimalnih mest; npr.; $l = 789 \text{ mm}$, $l = 78,9 \text{ cm}$, $l = 7,89 \text{ dm}$, $l = 0,789 \text{ m}$ ali $l = 0,000789 \text{ km}$, število decimalnih mest torej sploh ne vpliva na natančnost količine; v vseh petih primerih natančnost določajo tri pomembne številke, 7, 8 in 9. Pravilo, ki ga pogosto slišimo, da izmerjene količine zaokrožujemo na dve decimalni mesti, je seveda popolnoma nesmiselno.

1.2 Določitev napake izmerka

Pri boljših merilnih napravah nam **sistematsko napako** poda proizvajalec; če smo merilno napravo razvili sami, je pomemben del razvoja tudi določitev vseh parametrov, ki lahko vplivajo na nenatančnost pri merjenju, in na tej podlagi določitev sistematske napake. Kot orientacijo lahko vzamemo najmanjši razdelek, ki ga lahko še odčitamo (zadnje mesto pri digitalni napravi).

Slučajno napako določimo **statistično**, tako da poskus ponavljamo. Denimo, da pri N poskusih izmerimo vrednosti $x_i, i = 1, \dots, N$. Izračunamo povprečno vrednost

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

in povprečen kvadrat odstopanj σ_1 kot

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (1)$$

Če so meritve posameznih izmerkov med seboj *neodvisne*, lahko rezultat interpretiramo takole: pri nadaljnjih meritvah bo približno 2/3 meritev padlo znotraj intervala $[\bar{x} - \sigma_1, \bar{x} + \sigma_1]$, 1/3 meritev pa izven tega intervala.

Približna ocena. Zgornjo trditev lahko porabimo za določitev napake brez zamudnega seštevanja kvadratov odmikov. Napako izmerka σ_1 določimo tako, da poiščemo interval, znotraj katerega pade 2/3 izmerkov. Postopek ilustrirajmo na zgledu merjenja hitrosti: iz rezultatov v druge stolpcu izračunamo povprečno vrednost $\bar{v}$, nato pa v tretjem stolpcu zapišemo odstopanja. Nekaj odstopanj gre seveda v pozitivno smer, nekaj v negativno. Poiščimo 1/3 izmerkov (v našem primeru 3 ali 4), ki najbolj odstopajo (v tabeli so označeni z zvezdico). Izmed preostalih poiščimo tistega, ki (po absolutni vrednosti) najbolj odstopa, v našem primeru je to 3. izmerek. Napaka σ_1 je kar enaka absolutni vrednosti odstopanja tega izmerka, saj 2/3 (7 v našem primeru) meritev pade znotraj intervala $[\bar{v} - \sigma_1, \bar{v} + \sigma_1]$, v našem primeru med 9,5 in 10,5.

meritev	v_i [m/s]	$v_i - \bar{v}$ [m/s]	
1	9,80	-0,21	*
2	10,64	0,62	
3	9,52	-0,49	
4	9,71	-0,30	*
5	10,87	0,86	
6	10,10	0,09	
7	9,17	-0,84	*
8	10,31	0,30	
9	9,80	-0,21	
10	10,20	0,19	
povprečje	10,01		

Če napako izračunamo po formuli (1), dobimo praktično enako vrednost, $\sigma_1 = 0,5$.

Napaka povprečja. Z opisanim postopkom določimo napako merjene količine pri poskusu. Kot rezultat podamo *povprečno* vrednost izmerkov. Kolikšna je *napaka povprečne vrednosti* in v čem se razlikuje od *napake posameznega izmerka* σ_1 ? Razliko med tema dvema količinama pojasnimo na zgledu. Denimo, da eksperimentator A napravi N ponovitev poskusa in določi povprečno vrednost meritve $\bar{x}_A$. (Pri tem predpostavimo, da sistematske napake lahko zanemarimo.) Za njim eksperimentator B prav tako iz N ponovitev istega poskusa določi povprečno vrednost $\bar{x}_B$. Za koliko se obe povprečji razlikujeta? Statistika za tak primer pove, da je razlika med $\bar{x}_A$ in $\bar{x}_B$ v povprečju manjša od napake posameznega izmerka. Napaka se zmanjšuje obratno sorazmerno s *korenem* iz števila ponovitev. Za napako (negotovost) povprečja velja

$$\sigma_N = \frac{\sigma_1}{\sqrt{N-1}}.$$

Za $N = 1$ dobimo nesmiselno vrednost, kar pa je razumljivo, saj lahko napako σ_1 določimo šele, ko imamo vsaj dva izmerka. Če želimo napako zmanjšati za 10 krat, moramo torej napraviti 100 krat več ponovitev poskusa.

Negotovost napake. Statistika nam da še oceno natančnosti določitve napake. Negotovost (napaka) napake nam pri navedenem zgledu pove, za koliko bi se v povprečju razlikovali napaki, ki bi ju določila eksperimentatorja A in B. Velja

$$\sigma_\sigma = \frac{\sigma_N}{\sqrt{2(N-2)}}.$$

Vidimo, da je šele pri približno 50 ponovitvah poskusa, napaka napake 10 krat manjša od same napake. Ocena napake pri majhnem številu ponovitev (kot je to običajno v šoli) je torej precej nezanesljiva. Zato z zapisom same napake ne kaže pretiravati; zapis z eno pomembno števko ali kvečjemu dvema povsem zadošča.

Zapis rezultata. Kot končni rezultat naše meritve navedemo *povprečno* vrednost meritve, poleg nje pa še *napako povprečja*:

$$x = \bar{x} \pm \sigma_N.$$

Napako povprečja zapišemo z eno samo pomembno števko, le v primerih, ko bi se na prvem mestu enico ali dvojko, lahko zapišemo še drugo števko. Število pomembnih števk v zapisu povprečne vrednosti se ravna po napaki: povprečje zapišemo do istega desetiškega mesta, kot je napisana napaka.

Primer: za neko povprečje smo izračunali $\bar{t} = 23,456$ s in za napako $\sigma_N = 0,734$ s. Napako zaokrožimo na $\sigma_N = 0,7$ s, kar pomeni, da moramo tudi povprečje zapisati do prve decimalke, torej $t = 23,5 \pm 0,7$ s.

Zapis z relativno napako. Negotovost rezultata namesto s σ_N , ki jo imenujemo **absolutna** napaka, lahko zapišemo tudi z **relativno** napako

$$r = \frac{\sigma_N}{\bar{x}},$$

ki je seveda brez enote (lahko jo podamo tudi v odstotkih), na primer

$$c = 336 \text{ m/s} \pm 12 \text{ m/s} = 336 (1 \pm 0,04) \text{ m/s}.$$

Za zapis relativne napake velja enako pravilo, kot za zapis absolutne napake: zapišemo le eno pomembno števko; le če je prva števka 1 ali 2, smo upravičeni zapisati še drugo števko.

Zapis izmerkov. Pravilo, ki smo ga navedli, velja le pri zapisu končnega rezultata; vmesne rezultate pišemo z večjo natančnostjo. Pri zapisu odčitka (recimo dolžine z merilnega traku, časa s stoparice, napetosti na voltmetru) torej zapišemo vsa možna mesta, četudi pričakujemo, da bo končni rezultat zapisan z manjšo natančnostjo (z manjšim številom pomembnih števk.)

1.3 Računanje s količinami, obremenjenimi z napako

Količino, ki jo želimo pri poskusu določiti, ponavadi ne dobimo naravnost iz merjenj, temveč jo izračunamo iz ene ali več izmerjenih količin. Če na primer

določamo pospešek prostega pada iz časa t , ki ga potrebuje telo za prosti pad z višine h , velja $g = 2h/t^2$, pri tem sta tako h kot t obremenjena z napako. Kako v takšnih primerih določimo napako končnega rezultata?

Seštevanje in odštevanje količin. Če seštejemo rezultata dveh meritev (iste količine), obremenjena z napako, lahko zapišemo

$$z = x + y = \bar{x} \pm \sigma_x + \bar{y} \pm \sigma_y = (\bar{x} + \bar{y}) \pm (\sigma_x \pm \sigma_y),$$

od koder sledi

$$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y} \quad \text{in} \quad \sigma_z = |\sigma_x \pm \sigma_y|.$$

Napaka torej leži v intervalu med $\sigma_{\min} = |\sigma_x - \sigma_y|$ in $\sigma_{\max} = \sigma_x + \sigma_y$. Če sta meritvi med seboj nekorelirani – pomeni da izid prve meritve ne vpliva na izid druge meritve – dobimo najboljšo oceno po Pitagorjevem pravilu (trikotniku):

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$

Za odštevanje velja enako pravilo, saj lahko razliko zapišemo kot

$$z = x - y = (\bar{x} - \bar{y}) \pm (\sigma_x \mp \sigma_y),$$

saj odstopanje leži znotraj intervala med $|\sigma_x - \sigma_y|$ in $\sigma_x + \sigma_y$. Pri odštevanju nekoreliranih meritev spet velja, da je $\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$.

Pri seštevanju in odštevanju količin torej seštevamo kvadrate absolutnih napak.

Množenje in deljenje. Podobno kot zgoraj zapišimo

$$z = xy = (\bar{x} \pm \sigma_x)(\bar{y} \pm \sigma_y) = \bar{x}\bar{y} \pm \bar{y}\sigma_x \pm \bar{x}\sigma_y \pm \sigma_x\sigma_y.$$

Zvezo delimo z $\bar{z} = \bar{x}\bar{y}$:

$$\frac{z}{\bar{z}} = 1 \pm \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \pm \frac{\sigma_y}{\bar{y}} \pm \frac{\sigma_x\sigma_y}{\bar{x}\bar{y}} \quad (2)$$

in primerjamo z definicijo relativne napake

$$\frac{z}{\bar{z}} \equiv 1 \pm \frac{\sigma_z}{\bar{z}}.$$

Pri dovolj majhnih napakah lahko zadnji člen v (2) zanemarimo. Vidimo, da za *relativno* napako, $r_z = \sigma_z/\bar{z}$, velja enako pravilo kot za absolutno napako pri seštevanju. Za nekorelirani meritvi torej lahko zapišemo

$$r_z = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}.$$

Pri deljenju dobimo enako pravilo: seštevajo se kvadrati relativnih napak.

Pri množenju in deljenju seštevamo kvadrate relativnih napak.

Pravilo večje napake. V primerih, ko pri vsoti ali zmnožku dveh količin ugotovimo, da je napaka enega člena nekajkrat večja od napake drugega, seštevanje napak po Pitagorovem pravilu ni potrebno, saj lahko hitro uvidimo, da je rezultat zelo blizu večji napaki. V takšnem primeru je napaka rezultata kar enaka napaki najmanj natančne količine (absolutni pri seštevanju ali odštevanju in relativni pri množenju ali deljenju).

Potenciranje. Pri potenciranju lahko zapišemo

$$z = x^n = (\bar{x} \pm \sigma_x)^n = \bar{x}^n + n\bar{x}^{n-1}\sigma_x + \frac{n(n-1)}{2}\bar{x}^{n-2}\sigma_x^2 + \dots$$

Zvezo delimo z $\bar{z} = \bar{x}^n$ in dobimo

$$\frac{z}{\bar{z}} = 1 \pm n \frac{\sigma_x}{\bar{x}} + \dots \equiv 1 \pm \frac{\sigma_z}{\bar{z}}$$

S... smo označili člene, ki so majhni in jih lahko zanemarimo. Iz zgornjega rezultata razberemo pravilo: **relativna napaka pomnožimo z eksponentom**. Pravilo velja tudi za necele eksponente, potenca $n = \frac{1}{2}$ na primer predstavlja korensko funkcijo, in lahko zapišemo

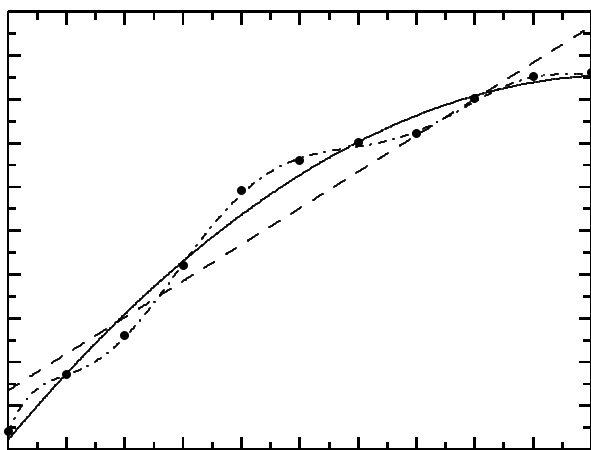
$$z = \sqrt{x}. \quad r_z = \frac{1}{2}r_x,$$

relativna napaka pri korenjenju se torej razpolovi.

2 Grafi

Pri merjenju pogosto iščemo odvisnost med dvema količinama; eno izmed njiju spreminjamo (tej pravimo *neodvisna* spremenljivka) in opazujemo, kako se spreminja druga količina (*odvisna spremenljivka*). Izmerke vpisujemo v tabelo, a iz table težko razberemo, za kakšno odvisnost gre. Zato izmerke vnesemo v graf, neodvisno spremenljivko običajno na vodoravno os, odvisno na navpično.

Kako potegnemo „pravo“ krivuljo skozi izmerjene točke? Na sliki 1 so narisane tri možne krivulje. V šolski praksi pogosto naletimo še na četrto, ko učenci točke povežejo kar z ravnimi črtami. Takšna zlomljena krivulja zagotovo ni upra-



Slika 1: Nekaj možnih krivulj skozi eksperimentalne točke

vičena, saj od fizikalne količine pričakujemo gladko obnašanje. Med tremi možnostmi na sliki pa se nekako ne moremo odločiti; očitno potrebujemo dodatno informacijo oziroma kriterij, ki bi nam pomagal pri odločitvi.

Kaj je pravzaprav namen grafičnega prikaza? Ločimo dve možnosti:

- V prvem primeru krivulja podaja fenomenološko odvisnost dveh količin; teoretične odvisnosti ne poznamo. Iz grafa razberemo vrednost odvisne količine pri vrednosti neodvisne količine, ki jo pri meritvi nismo zajeli (interpolacija). Z grafičnim prikazom tudi zgladimo morebitne neregularnosti zaradi merskih napak. Nekaj zgledov:
 1. temperaturni raztezek vode $\beta(T)$,
 2. temperaturna odvisnost upora žarnice,
 3. umeritvena krivulja pri instrumentu ali senzorju,

V tem primeru velja, da naj bo krivulja čim bolj *gladka*. Kriterij, za koliko smemo pri tem „zgrešiti“ izmerjeno točko v grafu, je napaka izmerka, ki ustreza tej točki. Če so napake izmerkov zelo majhne, smo na sliki 1 upravičeni skozi točke potegniti krivuljo iz črtic in pik; v nasprotnem primeru bo najbolj prava neprekinjena krivulja. Pri resnih meritvah za vsako izmerjeno točko določimo njeno napako s ponavljanjem meritev in jo tudi vnesemo v graf. V šoli tega ne običajno ne počnemo in napako določimo bodisi iz sistematske napake ali po občutku.

- V drugem primeru predpostavimo analitično odvisnost med količinama. Z risanjem krivulje, ki ustreza tej analitični odvisnosti (na primer premice pri linearni odvisnosti, parabole pri kvadratni odvisnosti, ...), želimo preveriti, če izmerjene točke res ubogajo predpostavljeno odvisnost. V primeru, da ubogajo, lahko določimo neznane parametre v teoretični odvisnosti, tako da skozi izmerjene točke potegnemo krivuljo, ki se izmerjenim točkam najlepše prilaga. Primeri:

1. $I = U/R$ odvisnost toka od napetosti je linearna, iz naklona premice določamo prevodnost (upor).
2. Pot pri enakomerno pospešenem gibanju je: $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$; s prilagajanjem parabole izmerjenim točkam določimo pospešek a , začetno hitrost v_0 in pot s_0 .

Pri preskusu veljavnosti analitične odvisnosti je odločilno, s kolikšno natančnostjo so obremenjeni izmerki. Podobno kot v prvem primeru tudi sedaj potrebujemo informacijo o napaki izmerjenih vrednosti v grafu. V grobem lahko rečemo, da je predpostavka o teoretični odvisnosti upravičena, če so odstopanja izmerjenih vrednosti od krivulje v okviru eksperimentalnih napak; če so odstopanja znatno večja, pa lahko upravičeno sklepamo, da predpostavka o teoretični odvisnosti ni smiselna.

2.1 Linearna odvisnost

Enačba premice. Veliko fizikalnim pojavom lahko priredimo linearno odvisnost:

$$y = kx + n. \quad (3)$$

Poleg zvez, v katerih je linearna odvisnost eksplicitna, lahko številne zveze pretvorimo v zgornjo obliko z uvedbo novih spremenljivk. Nekaj zgledov:

- $y = \frac{1}{2}at^2$, uvedemo $x = t^2$, torej je k v (3) enak $k = \frac{1}{2}a$,

- $j = j_0 e^{-\mu x}$, zvezo logaritmujemo: $\ln j = \ln j_0 - \mu x$, uvedemo $y = \ln j$, in razberemo $k = -\mu$ in $n = \ln j_0$,
- $pV^\kappa = \text{konst}$, logaritmujemo: $\ln p + \kappa \ln V = \ln(\text{konst})$, uvedemo $x = \ln V$ in $y = \ln p$ in ugotovimo $k = -\kappa$, $n = \ln(\text{konst})$.

Metoda najmanjših kvadratov. Recept za določitev parametrov premice k in n , ki se najboljše prilega izmerjenim točkam, je dobro znan: premica naj steče tako, da bo vsota kvadratov odstopanj najmanjša:

$$\sum_{i=1}^N [y_i - (kx_i + n)]^2 = \text{minimum} . \quad (4)$$

Z odvajanjem izraza (4) po parametrih k in n dobimo sistem linearnih enačb drugega reda; rešitev zapišemo kot:

$$k = \frac{\overline{xy} - \bar{y} \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} , \quad n = \frac{\bar{y} \overline{x^2} - \overline{xy} \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} , \quad (5)$$

pri čemer smo vpeljali

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i , \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i , \quad \overline{x^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 , \quad \overline{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i . \quad (6)$$

Grafična določitev „najboljše“ premice. Opisani računski postopek je zamuden, čeprav ga najdemo že programiranega v številnih kalkulatorjih. Z nekoliko vaje lahko dobimo skoraj enako dober rezultat grafično. Premico potegnemo skozi izmerjene točke (pri tem si pomagamo s prozornim ravnilom) tako, da ostane nad premico približno enako število izmerkov kot pod njo. Pri tem moramo paziti, da so izmerki nad (pod) premico enakomerno porazdeljeni po celem intervalu (glej sliko 2). Napačno bi bilo, če bi se izmerki nad premico grupirali na enem krajišču intervala, tisti pod premico pa na drugem. (Recimo, če bi na sliki 2 potegnili kar vodoravno premico po sredini slike.)

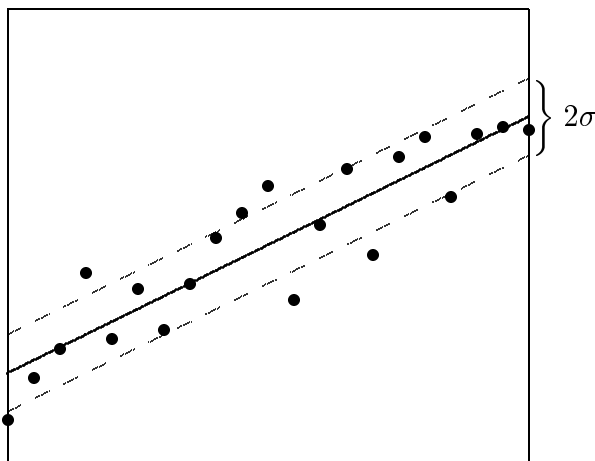
Premica skozi izhodišče. V primerih, ko modelsko odvisnost zapišemo v obliki $y = kx$, torej z $n = 0$, se pri risanju premice skozi izmerjene točke pogosto pojavi dilema, če je potrebno premico potegniti skozi izhodišče. Saj pri Ohmovem zakonu *vemo*, da tok pri napetosti 0 *mora* biti enak 0 in podobno pri Hookovem zakonu, Newtonovem zakonu ... V praksi se često dogaja, da najlepša premica skozi točke ne gre skozi izhodišče. Razlog je seveda v tem, da ničle merilnikov

nismo dobro določili. Tudi če napravimo meritev pri ničelni vrednosti neodvisne spremenljivke in vrednost odvisne spremenljivke merimo od njene ničelne vrednosti, smemo tako določeno izhodiščno točko obravnavati kot vsako drugo merjeno točko. Utež izhodiščne točke je lahko večja le v primeru, če vemo, da je meritev v izhodišču obremenjena z bistveno manjšo napako, kot pri ostalih točkah. Le v takšnem primeru lahko upravičimo zahtevo, da gre premica skozi izhodišče.

Ocena napake pri določitvi naklona premice. Pri poskusih, ki jih delamo v šoli in pri katerih preverjamo linearno odvisnost med fizikalnima količinama, običajno ne določamo statistične napake s ponavljanjem meritev pri vsaki vrednosti neodvisne spremenljivke, temveč napravimo meritev le po enkrat. Če lahko privzamemo, da so napake le statistične in vrednosti izmerkov neodvisne druga od druge, lahko ocenimo povprečno napako izmerkov in napako naklona premice, ki smo jo potegnili skozi izmerjene točke.

Postopek razdelimo na dve dela; v prvem delu določimo povprečno napako izmerkov σ in v drugem napako naklona σ_k .

Pri določitvi σ upoštevamo lastnost, da dve tretjini izmerkov pade znotraj intervala $[\bar{y} - \sigma, \bar{y} + \sigma]$. Napako σ lahko torej določimo grafično: okoli izmerkov načrtamo paralelogram, takšen da znotraj lika zajamemo približno dve tretjini vseh točk. Pri tem morata biti dve stranici paralelograma vzporedni s premico, ki se najlepše prilagaja izmerjenim točkam, in enako oddaljeni od nje. Razdalja med stranicama, merjena v navpični smeri, je potem ravno enaka 2σ . (Glej sliko 2.)



Slika 2: Grafična določitev napake izmerkov

Ko tako dobimo povprečno napako izmerka σ , lahko določimo še napako na-

klona k . Za napako naklona k velja:

$$\sigma_k = \frac{2\sigma}{\Delta x} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{N}}, \quad (7)$$

pri čemer je $\Delta x = x_{\max} - x_{\min}$ širina intervala, na katerem leže vrednosti neodvisne spremenljivke. (Glej zgled v *Vzorčnem poročilu*.)

Napako naklona lahko določimo še na dva načina:

Pri prvem načrtamo paralelogram tako, da objamemo vse točke. Načrtamo obe diagonali in določimo njuna naklonska koeficienta $k_{\max}$ in $k_{\min}$. Napak naklona je potem:

$$\sigma_k \approx \frac{k_{\max} - k}{\sqrt{N-2}} \approx \frac{k - k_{\min}}{\sqrt{N-2}}. \quad (8)$$

Pri drugem načinu izmerjene točke paroma povežemo in sicer i -to točko z $\frac{1}{2}N + i$ -to, za $i = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}N$. Če imamo denimo $N = 10$ točk povežemo prvo in šesto, drugo in sedmo, ... peto in deseto. Iskani naklon premice skozi točke je potem enak kar povprečni vrednosti naklonskih koeficientov tako dobljenih daljic, $k_1, k_2, \dots, k_{N/2}$, napaka naklona pa napaki povprečja:

$$\bar{k} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}N} k_i, \quad \sigma_k = \frac{4}{N(N-2)} \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}N} [k_i^2 - \bar{k}^2]. \quad (9)$$

2.2 Nelinearne odvisnosti

Vseh teoretičnih odvisnosti, ki jih srečamo v fiziki, ne moremo prevesti v linearno zvez. Najenostavnejši zgled je odvisnost poti od časa pri enakomerno pospešenem gibanju. V tem primeru si pomagamo z računalnikom. Eden najboljših računalniških paketov za ta namen je *gnuplot* (glej <http://www.gnuplot.info/>), ki ima eno samo „pomanjkljivost“, je namreč brezplačen.